BRANIMIR DAKIĆ
NEVEN ELEZOVIĆ

MATEMATIKA U 24 LEKCIJE

priručnik za pripremu državne mature

programi A i B

1. izdanje

Zagreb, 2009.

PREDGOVOR

Državna je matura najvažniji pojedinačni ispit u školovanju svakog budućeg studenta. Njezina je uloga dvojaka: potvrditi da je učenik s uspjehom usvojio znanja tijekom srednjoškolskog školovanja, te omogućiti nastavak školovanja na željenom fakultetu, visokoj ili višoj školi, pri čemu rezultati postignuti na državnoj maturi imaju iznimno velik utjecaj.

Na državnoj maturi ispitivat će se temeljna matematička znanja, ona za koja stručnjaci smatraju da trebaju biti sastavni dio trajno usvojenih znanja i vještina svakog maturanta. Naizgled, za državnu se maturu učenik koji je redovito i kvalitetno učio ne treba dodatno pripremati. Nažalost, to je vrlo daleko od istine. Polaganje ovog ispita bit će za učenika vrlo naporan i stresan događaj. Za tako važan ispit i kompeticiju s nepredvidljivim ishodom potrebna je iznimno dobra priprema. Samo dugotrajnom vježbom i s vjerom u svoje sposobnosti učenik može na takvom ispitu, potpuno miran, pružiti svoj maksimum.

Većina gimnazijske populacije u Republici Hrvatskoj tijekom školovanja koristila je udžbenike iz matematike istih autora. Za postizanje uspjeha na državnoj maturi ne treba pročitati ni naučiti ništa više od onog što se u tim udžbenicima nalazi. Naprotiv, program državne mature iz matematike osakaćen je (zasad) u odnosu na redoviti program općih gimnazija, da i ne spominjemo usporedbu s programom prirodoslovnih gimnazija. Nadalje, količina gradiva u udžbenicima svih četiriju razreda prevelika je da bi se mogla u kratkom roku ponoviti, koristeći se tim knjigama. I konačno, priprema za državnu maturu nije identična učenju tijekom školovanja; ovdje je riječ o ponavljanju već usvojenog gradiva, njegovoj sintezi i vezi između različitih područja.

Svi ti razlozi nagnali su nas da priredimo ovaj priručnik kao pomoć za kvalitetnu pripremu za državnu maturu iz matematike. Gradivo je podijeljeno na logične cjeline u kojima se nakon kratkog ponavljanja najvažnijih pojmova i formula nalazi dovoljan broj detaljno riješenih primjera, a zatim dvije skupine zadataka — zadaci u kojima se traži kompletan postupak rješavanja i zadaci višestrukog izbora.

Ovim je priručnikom pokriveno cjelokupno gradivo koje se nalazi u katalogu za polaganje državne mature prema A i B programu. Ispitni zadaci koji budu postavljeni na maturi bit će u prosjeku nešto jednostavniji od zadataka iz ovoga priručnika. Naravno da je to učinjeno s namjerom — i atletičar koji se sprema za trku na 400 metara za vrijeme treninga pretrčat će i mnogo dulje dionice. Učenik koji s uspjehom bude riješio zadatke iz ovoga priručnika, s lakoćom će riješiti i zadatke na državnoj maturi. Pritom treba imati na umu da je državna matura kraj jednog, ali i početak drugog školovanja. Mnogi će se učenici u nastavku školovanja ponovno susresti s matematikom, na višem i težem nivou. Uspješna priprema za državnu maturu bit će im, bez sumnje, vrlo korisna u nastavku školovanja.

Riječ-dvije o tome kako se koristiti ovim priručnikom. Gradivo je podijeljeno na 24 lekcije, što omogućuje jednostavnije planiranje. Mi preporučujemo da se gradivo u ovome priručniku prijeđe jednakim tempom, najbolje tijekom šest mjeseci, dakle, brzinom od jedne lekcije u tjedan dana. Naravno da se isto može učiniti i za vrijeme od tri mjeseca (ipak je riječ o ponavljanju poznatoga gradiva), pa čak i za samo jedan mjesec — svaki dan jedna lekcija (uz odmor nedjeljom). Vjerojatno će najuspješnija metoda biti kombinacija prve i treće: nakon polaganog prelaženja cjelokupnog gradiva, pred ispit se još jednom ponovi najvažnije.

U priručniku je dan dovoljan broj ispita — njih 75. Jedan se ispit treba riješiti u roku od 60 minuta. Unutar istoga poglavlja, ispiti su otprilike jednake težine. Predlažemo učeniku da prati svoj napredak na sljedeći način. Prilikom prvoga prolaženja gradiva, neka preskoči jedan od ispita u svakom poglavlju. Recimo, prvi ispit u neparnim i drugi ispit u parnim poglavljima (ili obratno). Kada bude prešao cjelokupno gradivo, neka u ponavljanju riješi te preskočene ispite. Bez obzira na to koji odabir napravi, sigurni smo da će u drugom prelaženju postići bolje rezultate.

Vjerujemo da će ovaj priručnik osigurati uspješno polaganje ovog važnog ispita i omogućiti željeni nastavak školovanja.

Franka Dakić

N. Elezović

U Zagrebu, srpnja 2009.

SADRŽAJ

1. lekcija	Realni brojevi	1
2. lekcija	Algebarski izrazi	21
3. lekcija	Polinomi i algebarske jednadžbe	35
4. lekcija	Linearne jednadžbe i problemi prvog stupnja	45
5. lekcija	Uređaj na skupu realnih brojeva	61
6. lekcija	Skup kompleksnih brojeva	75
7. lekcija	Kvadratna funkcija, jednadžbe i nejednadžbe	85
8. lekcija	Eksponencijalne i logaritamske funkcije	107
9. lekcija	Funkcije	127
10. lekcija	Trigonometrijske funkcije	141
11. lekcija	Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe	163
12. lekcija	Planimetrija	181
13. lekcija	Trigonometrija pravokutnog trokuta	205
14. lekcija	Poučci o trokutu i primjene trigonometrije	219
15. lekcija	Poliedri i rotacijska tijela	229
16. lekcija	Koordinatni sustav u ravnini	245
17. lekcija	Pravac	255
18. lekcija	Kružnica	269
19. lekcija	Elipsa, hiperbola i parabola	281
20. lekcija	Geometrija prostora	297
21. lekcija	Vektori	313
22. lekcija	Aritmetički i geometrijski niz	323
23. lekcija	Derivacije funkcija	337
24. lekcija	Primjene diferencijalnog računa	351
	Završni ispiti	373
	Rješenja zadataka	391
	Rješenja ispita	407

1. lekcija

1. lekcija Ponovimo

Prirodni brojevi

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}.$$

Skup prirodnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje i množenje.

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u **pozicijskom sustavu** s **bazom** b ima vrijednost:

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Znamenke $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Indeks označava u kojoj je bazi zapisan broj. U dekadskom sustavu brojeva je $b = 10$, u binarnom $b = 2$, u oktalnom $b = 8$, a u heksadecimalnom $b = 16$.

Svaka se dva prirodna broja m i n mogu usporediti prema veličini.

Neka je n po volji odabran prirodni broj. Onda je njegov sljedbenik prirodni broj $n + 1$, a njegov prethodnik $n - 1$.

Prirodni broj m djeljiv je prirodnim brojem n ako postoji prirodni broj p takav da je $m = n \cdot p$. Kažemo da je n **djelitelj** ili **mjera** od m i pišemo $n|m$.

Prirodni broj veći od 1 je **prost** ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Broj je **složen** ako nije prost, s iznimkom broja 1 koji ne držimo ni prostim ni složenim. **Paran broj** je složen broj djeljiv s 2.

Svaki se prirodni broj može na jedinstven način napisati u obliku umnoška prostih brojeva:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Kriteriji djeljivosti

- Prirodni broj je djeljiv brojem 2 ako je njegova posljednja znamenka 0 ili paran broj.
- Prirodni broj je djeljiv brojem 3 ako je zbroj njegovih znamenki broj djeljiv sa 3.
- Prirodni broj je djeljiv s 4 ako je dvoznamenkast broj što ga čine posljednje dvije znamenke djeljiv sa 4.
- Prirodni broj je djeljiv s 5 ako je njegova posljednja znamenka 0 ili 5.
- Prirodni broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv s 2 i s 3.

- Prirodni broj je djeljiv s 8 ako je njegov troznamenkast završetak broj djeljiv s 8.
- Broj je djeljiv s 9 ako je zbroj njegovih znamenki djeljiv s 9.
- Broj je djeljiv s 11 ako je razlika zbroja znamenki na parnim pozicijama i zbroja znamenki na neparnim pozicijama broj djeljiv s 11.

Cijeli brojevi

Operacija oduzimanja u skupu prirodnih brojeva ne može se uvijek definirati. To dovodi do proširenja skupa prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva.

Skup **cijelih brojeva** označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Taj skup zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje i množenje. Dijeljenje s nulom nije definirano.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu cijelih brojeva

- Zakon komutativnosti ili zamjene mjesta:

$$a + b = b + a; \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

- Zakon asocijativnosti:

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- Za svaki cijeli broj a vrijedi:

$$a + 0 = a;$$

$$a \cdot 1 = a.$$

- Za svaki cijeli broj $a \neq 0$ postoji cijeli broj $-a$ tako da vrijedi:

$$a + (-a) = 0.$$

Broj $-a$ je **suprotni broj** broja a.

Mjera i višekratnik

Ako za dva cijela broja a i b postoji broj d, $d \neq 0$, takav da je $a = a_1 \cdot d$ i $b = b_1 \cdot d$, kažemo da je d **zajednički djelitelj** ili **zajednička mjera** brojeva a i b.

Najveći broj d s ovim svojstvom zove se **najveća zajednička mjera** od a i b.

Ako su dana dva cijela broja a i b, tada broj v za koji vrijedi $a|v$ i $b|v$ zovemo zajedničkim višekratnikom brojeva a i b. Najmanji od brojeva v s ovim svojstvom zovemo **najmanjim zajedničkim višekratnikom** i označavamo s $V(a,b)$.

Ako dva (ili više) cijelih brojeva nemaju zajedničkih djelitelja (osim broja 1), tada kažemo da su ti brojevi **relativno prosti**.

Racionalni brojevi

Nemogućnost potpunog definiranja operacije dijeljenja u skupu cijelih brojeva zahtijeva uvođenje skupa racionalnih brojeva. Racionalni brojevi su količnici cijelih brojeva. Skup **racionalnih brojeva** označavamo s $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \quad m, n \in \mathbf{Z}, \quad n \neq 0 \right\}.$$

Svaki racionalni broj moguće je zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje je m cijeli, a n prirodni broj.

Skup racionalnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Uspoređivanje razlomaka

Razlomke jednakih nazivnika uspoređujemo poput prirodnih brojeva, uspoređujući njihove brojnike.

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \text{ ako je } a < b \qquad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \text{ ako je } a > b.$$

Razlomke različitih nazivnika uspoređujemo svođenjem na zajednički nazivnik dobivajući tako razlomke jednakih nazivnika.

Jednakost razlomaka

Razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jednaki su ako i samo ako je $a \cdot d = b \cdot c$.

Za svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ i svaki broj m različit od nule vrijedi:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}.$$

Čitamo li jednakost zdesna ulijevo, tada je riječ o **proširivanju razlomaka** $\frac{a}{b}$, a čitamo li je slijeva udesno, tada govorimo o **kraćenju razlomaka** $\frac{a \cdot m}{b \cdot m}$.

Svaki se racionalni broj može kraćenjem dovesti na oblik u kojem brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja.

Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Razlomke koji nemaju zajednički nazivnik moramo proširiti kako bismo dobili razlomke jednakih nazivnika. Zajednički je nazivnik izraz koji sadrži faktore svih pojedinih nazivnika razlomaka koje zbrajamo ili oduzimamo.

Množenje i dijeljenje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Količnik dvaju razlomaka može se zapisati u obliku dvojnog razlomka:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Pritom a i d nazivamo vanjskim, a b i c unutarnjim članovima dvojnog razlomka. Ovo pamtimo kao pravilo: **razlomci se dijele tako da se prvi razlomak pomnoži recipročnim razlomkom drugog**.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu racionalnih brojeva

- Komutativnost:
$$a + b = b + a;$$
$$a \cdot b = b \cdot a.$$
- Asocijativnost:
$$a + (b + c) = a + (b + c);$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$
- Distributivnost množenja prema zbrajanju:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- Neutralni elementi (0 za zbrajanje, 1 za množenje):

$$a + 0 = a,$$
$$a \cdot 1 = a.$$

- Za svaki racionalni broj $a \neq 0$ postoji njemu suprotni broj $-a$ i racionalan broj $\frac{1}{a}$ takav da vrijedi:

$$a + (-a) = 0 \quad \text{i} \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Broj $\frac{1}{a}$ **inverzni** je **broj** broja a.

Pravi razlomak je razlomak kojem je brojnik manji od nazivnika.

Mješoviti broj je zbroj $a + \frac{b}{c}$, prirodnog broja a i pravog razlomka $\frac{b}{c}$. Iz praktičnih se razloga zapisuje u obliku $a\frac{b}{c}$:

$$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}.$$

Realni brojevi

Brojevi koji nisu racionalni, tj. koje nije moguće predočiti kao količnike dvaju cijelih brojeva zovu se **iracionalni brojevi**.

Skup **racionalnih brojeva** označavamo s **I**.
Iracionalni brojevi su na primjer brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, π, e,....

Skup **realnih brojeva** **R** sastoji se od racionalnih i iracionalnih brojeva:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$

Taj skup je zatvoren s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i djeljenje.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu realnih brojeva

- Komutativnost:

$$a + b = b + a;$$
$$a \cdot b = b \cdot a.$$

- Asocijativnost:

$$a + (b + c) = a + (b + c);$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

- Neutralni elementi (0 za zbrajanje, 1 za množenje):

$$a + 0 = a,$$
$$a \cdot 1 = a.$$

- Suprotni i inverzni element:

$$a + (-a) = 0, \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad \text{za svaki } a \neq 0.$$

Svaki realan broj a možemo prikazati u decimalnom zapisu:

$$a = a_0.a_1a_2a_3\ldots$$

pri čemu je a_0 cijeli broj, a a_1, a_2, $a_3\ldots$ neke od znamenki 0, 1,..., 9.

Decimalni zapis racionalnog broja je ili konačan ili beskonačan i periodični, što znači da se od izvjesnog mjesta iza decimalne točke skupina znamenki periodički ponavlja. Decimalni zapis racionalnog broja $\frac{m}{n}$ je konačan ako i samo ako nazivnik n nema drugih prostih faktora osim 2 i 5.

Decimalni zapis iracionalnog broja je beskonačan i neperiodični.

Potencije

Potencija a^n jednaka je umnošku n jednakih faktora:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Realni je broj a **baza** (ili **osnovica**) **potencije**, a prirodni broj n njezin je **eksponent**. Uzima se da je $a = a^1$.

Pri računanju s potencijama vrijede sljedeća pravila:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$
$$a^0 = 1,$$
$$(a^m)^n = a^{mn},$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Potencije s racionalnim eksponentom

Ako je a pozitivan realni broj i m, n prirodni brojevi, onda je:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vrijedi:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Korijeni

Kvadratni (drugi) korijen pozitivnog broja a jest pozitivni broj $\sqrt{a}$ za koji vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Također je $\sqrt{0} = 0$.

Za bilo koji realni broj a vrijedi:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Za pozitivne brojeve a i b vrijedi:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Ako su a i b pozitivni brojevi, te n prirodni broj i ako vrijedi $b^n = a$, broj b je tada n-ti korijen iz a. Dakle:

$$b^n = a \Longleftrightarrow b = \sqrt[n]{a}.$$

Svojstva korijena su:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \quad k \in \mathbf{N};$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n}.$$

Ako je a realni broj i n neparan, onda je $\sqrt[n]{a^n} = a$. Ako je a realni broj i n paran, onda je $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Neka je a pozitivan realni broj. Tada $(-a)^{\frac{1}{n}}$ postoji samo ako je n neparan broj. Pritom je:

$$(-a)^{\frac{1}{n}} = -a^{\frac{1}{n}}, \qquad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Aritmetička sredina

Neka je dano n realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Broj:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

je njihova **aritmetička sredina** ili **prosjek**.

Geometrijska sredina

Neka je dano n nenegativnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Broj:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$$

je njihova **geometrijska sredina**.

Postotni račun

Osnovna vrijednost x je broj od kojeg se obračunava postotak.

Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine:

$$p\% = \frac{p}{100}.$$

Postotni iznos P je broj koji se dobije kad se od osnovne veličine odredi dio naznačen danim postotkom:

$$P = x \cdot \frac{p}{100}.$$

Izračunati postotak p od neke osnovne vrijednosti x znači izračunati postotni iznos P, tj. odrediti vrijednost funkcije:

$$f(x) = \frac{p}{100} \cdot x.$$

Ako je broj P dobiven uvećanjem broja x za postotak p, to pišemo:

$$P = x + x \cdot \frac{p}{100} = x\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

1. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Zbroj šest uzastopnih prirodnih brojeva je 57. Koliki je njihov najmanji zajednički višekratnik?

Rješenje. Neka je n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ i $n+5$ šest uzastopnih prirodnih brojeva. Njihov zbroj je:

$$6n + 15 = 57,$$

odakle je $n = 7$. Ostali brojevi su 8, 9, 10, 11 i 12. Rastavimo li ih sada na proste faktore, dobivamo:

$$7 = 7, \quad 8 = 2^3, \quad 9 = 3^2, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 11 = 11, \quad 12 = 2^2 \cdot 3,$$

te je njihov najmanji zajednički višekratnik jednak $N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27\,720$.

Primjer 2.

1) Ako je $a+b = 42$, $b+c = 28$, $c+a = 24$, koliko je $a \cdot b \cdot c$?

2) Ako je $a \cdot b = 42$, $b \cdot c = 28$, $c \cdot a = 24$, koliko je $a+b+c$?

Rješenje. **1)** Zbrajanjem svih triju jednadžbi, dobije se $2(a+b+c) = 94$, a odatle $a+b+c = 47$. I sada, iz $a+b = 42$ i $a+b+c = 47$ slijedi $42+c = 47$, pa je $c = 5$. Na jednak se način dobije $a = 19$ i $b = 23$. Konačno, $abc = 2185$.

2) Pomnožimo sve tri jednadžbe i dobijemo $(abc)^2 = (6 \cdot 7 \cdot 4)^2$, te je $abc = 6 \cdot 7 \cdot 4$ ili $abc = -6 \cdot 7 \cdot 4$. Lako se sada dobije $a = 6$, $b = 7$, $c = 4$ ili $a = -6$, $b = -7$, $c = -4$ te je $a+b+c = 17$, odnosno $a+b+c = -17$.

Primjer 3.

Odredimo sve cijele brojeve x, y i z za koje je:

1) $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-10) = 0$;

2) $(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = 0$;

3) $(x-2) \cdot (y+1) \cdot (z-3) = 1$.

Rješenje. **1)** Da bi umnožak bio jednak nuli dovoljno je da bude jedan faktor jednak nuli. Zato ova jednadžba ima jedanaest rješenja:

Ili je $x = 0$, ili je $x = 1$, ili $x = 2$ ili, $\ldots$, ili $x = 10$.

2) Kako zbroj kvadrata dvaju brojeva nikad nije negativan broj, ova jednakost je moguća samo kada su oba pribrojnika jednaka nuli. Tako imamo ova rješenja jednadžbe: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

3) Kako je riječ o umnošku cijelih brojeva, a broj faktora je neparan, imamo sljedeće mogućnosti:

(1) $x-2 = 1$, $y+1 = 1$, $z-3 = 1$, odakle slijedi $x = 3$, $y = 0$, $z = 4$;

(2) $x-2 = 1$, $y+1 = -1$, $z-3 = -1$, odakle slijedi $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$;

(3) $x-2 = -1$, $y+1 = 1$, $z-3 = -1$, odakle slijedi $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$;

(4) $x-2 = -1$, $y+1 = -1$, $z-3 = 1$, odakle slijedi $x = 1$, $y = -2$, $z = 4$.

Primjer 4.

Dokažimo:

1) zbroj svakih pet uzastopnih cijelih brojeva djeljiv je s 5;

2) zbroj svaka tri uzastopna parna broja djeljiv je sa 6;

3) zbroj svaka četiri uzastopna neparna cijela broja djeljiv je s 8.

Rješenje. **1)** Zbroj pet uzastopnih cijelih brojeva zapisat ćemo na sljedeći način: $(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2)$. Taj je zbroj jednak $5n$, što je očito broj djeljiv s 5.

2) Imamo redom: $(2n-2) + 2n + (2n+2) = 6n$. Rezultat je broj djeljiv sa 6.

3) Zbrajanjem dobijemo: $(2n-3) + (2n-1) + (2n+1) + (2n+3) = 8n$. Očito, $8n$ je broj djeljiv s 8 za svaki cijeli broj n.

Primjer 5.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je 561. Odredimo n.

Rješenje. Zbroj n uzastopnih cijelih brojeva računa se po formuli $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Trebamo, dakle, riješiti kvadratnu jednadžbu $n \cdot (n+1) = 1122$. Rješenja su brojevi $n_1 = -34$ i $n_2 = 33$. Kako je broj n prirodan, prihvaćamo drugo rješenje. Zbroj prva 33 prirodna broja jednak je 561.

Primijetimo kako do rješenja možemo doći i na sljedeći način: Broj 1122 rastavimo na proste faktore: $1122 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$. Kako je umnožak $n(n+1)$ umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, zaključujemo: $n = 33$.

Primjer 6.

Ako je $1+2+3+\ldots+50 = 1275$, koliko je $51+52+53-\ldots+100$?

Rješenje. Možemo zapisati: $51+52+53+\ldots+100 = 50\cdot 50+(1+2+3+\ldots+50)$. Zbroj brojeva u zagradi jednak je 1275 pa imamo: $51 + 52 + 53 + \ldots + 100 = 50 \cdot 50 + 1275 = 2500 + 1275 = 3775$.

Primjer 7.

Koja je posljednja znamenka umnoška triju potencija $3^{55} \cdot 4^{55} \cdot 6^{55}$?

Rješenje. Posljednja se znamenka potencije 3^n periodički ponavlja. Kako je redom $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81, \ldots$, jasno je da će posljednja znamenka od $3^{55} = (3^4)^{13} \cdot 3^3$ biti 7. Analogno, jer je $4^{55} = (4^2)^{27} \cdot 4 = 16^{27} \cdot 4$, posljednja znamenka od 4^{55} jest 4. I konačno, posljednja znamenka broja 6^{55} je 6. Dakle, posljednja je znamenka umnoška $3^{55} \cdot 4^{55} \cdot 6^{55}$ znamenka 8.

No, primijetite kako sve tri potencije imaju jednak eksponent. Zbog toga je $3^{55} \cdot 4^{55} \cdot 6^{55} = (3 \cdot 4 \cdot 6)^{55} = 72^{55}$ pa je posljednja znamenka umnoška jednaka posljednjoj znamenci potencije 2^{55}. A ona je, zbog $2^{55} = (2^4)^{13} \cdot 2^3$, jednaka 8.

Primjer 8.

Broj 750 podijelimo na dva dijela tako da 8% prvog dijela zajedno s 24% drugoga čini 11.2% od danog broja.

Rješenje. Neka je $x + y = 750$. Tada je $0.08x + 0.24y = 0.112 \cdot 750 = 84$. Ovo je sustav jednadžbi iz kojega se dobije $x = 600$, $y = 150$. Provjera pokazuje da je rezultat točan. Naime, vrijedi: $0.08 \cdot 600 = 48$, zatim $0.24 \cdot 150 = 36$, te je $48 + 36 = 84$, a već smo izračunali $84 = 0.112 \cdot 750$. Također je $x + y = 600 + 150 = 750$.

Primjer 9.

Ako je omjer razlike, zbroja i umnoška dvaju brojeva jednak $1 : 2 : 6$, koliki je količnik tih brojeva?

Rješenje. Iz $(a - b) : (a + b) = 1 : 2$ slijedi $a = 3b$. A iz $(a + b) : (ab) = 1 : 3$, uz $a = 3b$ i $b \neq 0$, dobije se $b = 4$. Zatim je $a = 12$, te je $a : b = 3$.

Primjer 10.

U brojevnom sustavu s bazom n vrijedi jednakost $12_{(n)} + 23_{(n)} = 40_{(n)}$. O kojoj je bazi riječ?

Rješenje. Prebacimo brojeve iz zapisa u bazi n u dekadski zapis:

$$12_{(n)} = 1 \cdot n^1 + 2 \cdot n^0 = n + 2,$$
$$23_{(n)} = 2 \cdot n^1 + 3 \cdot n^0 = 2n + 3,$$
$$40_{(n)} = 4 \cdot n^1 + 0 \cdot n^0 = 4n.$$

Sada imamo jednadžbu $n + 2 + 2n + 3 = 4n$, iz koje slijedi $n = 5$.

Primjer 11.

Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva jednak je 450. Kolika je aritmetička sredina drugih korijena tih brojeva?

Rješenje. Za x, $y > 0$ vrijedi:

$$\frac{x+y}{2} + \sqrt{x \cdot y} = 450.$$

Pomnožimo li jednakost s 2 i umjesto x i y napišemo $\sqrt{x}^2$ i $\sqrt{y}^2$, imamo:

$$\sqrt{x}^2 + 2\sqrt{xy} + \sqrt{y}^2 = 900, \quad \text{odnosno} \quad \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 900,$$

odakle korjenovanjem i dijeljenjem s 2 dobivamo aritmetičku sredinu drugih korijena brojeva $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} = 15$.

Primjer 12.

Koja se znamenka nalazi na 701. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\dfrac{3}{7}$?

Rješenje. Broj $\dfrac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$ je periodičan s periodom duljine 6 znamenki. Podijelimo li 701 sa 6, dobivamo količnik 116 i ostatak 5. Dakle, period će se izredati 116 puta i nakon njega slijedi još 5 znamenki. Stoga je 701. znamenka iza decimalne točke upravo 7.

Primjer 13.

Ako je $0.4\dot{7}\dot{2} = \frac{m}{n}$, $M(m,n) = 1$, koliko je $m+n$?

Rješenje. Decimalni broj $0.4\dot{7}\dot{2}$ je beskonačan i periodičan (period čine dvije znamenke) a želimo ga zapisati u obliku razlomka.

Zapišimo $r = 0.4\dot{7}\dot{2} = 0.4 + 0.0\dot{7}\dot{2}$.

Označimo li sada $x = 0.0\dot{7}\dot{2}$, imat ćemo da je $1\,000 \cdot x = 72.\dot{7}\dot{2} = 72 + 10x$.

Odatle slijedi $990x = 72$, te je $x = \frac{72}{990} = \frac{4}{55}$.

I sada je $r = 0.4 + \frac{4}{55} = \frac{26}{55}$, pa je $m+n = 81$.

Primjer 14.

Izračunajmo bez uporabe kalkulatora: $(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

Rješenje. Zadatak možemo riješiti na sljedeći način:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} = -\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \cdot (5+2\sqrt{6})}$$
$$= -\sqrt{(5-2\sqrt{6}) \cdot (5+2\sqrt{6})} = -\sqrt{1} = -1.$$

No, da smo uočili kako je $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}+\sqrt{3}| = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, bilo bi isto $(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = -1$.

Primjer 15.

Izračunajmo vrijednost brojevnog izraza $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(ab^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-2}$ za $a = \frac{1}{8}$, $b = 0.25$.

Rješenje. Najprije pojednostavnimo zadani izraz. Provedimo potenciranja naznačena okruglim zagradama pa zatim provedimo množenje potencija jednakih baza. Tako imamo redom:

$$\left[\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{4}}\right) : \left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-2} = \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-2} = a^{-\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{3}{2}}.$$

Uvrstimo sada zadane vrijednosti za a i b pa imamo:

$$(2^{-3})^{-\frac{4}{3}} \cdot (2^{-2})^{\frac{3}{2}} = 2^4 \cdot 2^{-3} = 2.$$

1. lekcija Zadaci

1. Ako je $ab+bc = 33$, $bc+ac = 30$, $ac+ab = 15$, izračunajte $a+b+c$.

2. S koliko nula završava broj: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 25$?

3. Koja je posljednja znamenka zbroja $1! + 2! + 3! + \ldots 25!$, gdje je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$?

4. Izračunajte:

1) $1-2+3-4+5-\ldots+99-100+101$;

2) $\frac{1}{0.1} + \frac{2}{0.2} + \frac{3}{0.3} + \ldots + \frac{9}{0.9}$.

5. Zbroj 11 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 110. Koji su to brojevi?

6. Zbroj prvih 11 prirodnih brojeva pomnožimo s 2, zatim s 3, pa s 4 i tako redom. Konačno, taj zbroj pomnožimo i s 11. Koliki je zbroj svih ovih umnožaka?

7. Odredite broj c ako je $a : b = 3 : 2$, $b : c = 3 : 5$, te $a+b+c = \frac{25}{36}$.

8. Ako je $a : b = 2 : 3$, $b : c = 1 : 2$, koliko je $\frac{a-b}{a+b} : \frac{b-c}{b+c}$?

9. Ako je $(xy) : (yz) : (zx) = 2 : 3 : 5$, koliko je $x : y : z$?

10. Koliki mora biti zbroj znamenki x i y u broju $35xy72$ kako bi taj broj bio djeljiv s 18?

11. Odredite 333. znamenku u decimalnom zapisu broja $\frac{5}{7}$.

12. Odredite najmanji prirodni broj n za koji je:

1) $2^n > 100$; **2)** $(-2)^n > 100$.

13. Izračunajte:

1) $\frac{0.04^{-2} \cdot 125^4 \cdot 0.2^{-1}}{4 \cdot 25^8}$;

2) $\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3-(-2)^{-3}}$.

14. Odredite prirodni broj n ako je:

1) $2^{2n} = 4^5$; **2)** $3 \cdot 9^n = 3^{11}$;

3) $(2^n)^3 \cdot 4 = 2^{11}$.

15. Ako je $5^m = 3$, te $3^n = 0.2$, koliko je $m \cdot n$?

16. Koliko znamenki ima broj $4^5 \cdot 5^{13}$?

17. Ako je $a = 3^{18}$, $b = 4^{20}$, koja je posljednja znamenka zbroja, a koja umnoška brojeva a i b?

18. **1)** Prikažite u obliku potencije s bazom 2: $2^8 + 4^5 + 8^3 + 16^2$.

2) Prikažite u obliku potencije s bazom 3: $5 \cdot 9^5 + 4 \cdot 27^3 + 8 \cdot 3^9$.

3) Prikažite u obliku potencije s bazom 6: $2^{n-1} \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1} \cdot 3^{n-1} + 6^{n-1}$.

19. Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 11. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

20. Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 13 i 41, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?

21. U skupini od 32 osobe prosječna starost iznosi 25 godine. Ako se izdvoje najmlađa osoba, kojoj je 15 godina, i najstarija, kojoj je 35 godina, koliki je prosjek godina ostalih?

22. U I^c razredu je 28 učenika. Na pismenom ispitu iz matematike prosjek osvojenih bodova iznosio je 15. Ako je 5 učenika imalo 20 bodova, a 3 učenika imali su po 18 bodova, koliki je prosjek ostalih?

23. Neki je tenisač pobijedio u 7 od 18 susreta, a u sljedećih 7 susreta pobijedio je 3 puta. Izrazite u postocima broj njegovih poraza u svim ovim susretima.

24. Cijena nekog odijela snižena je za 35% i sada iznosi 942.5 kn. Kolika je bila cijena odijela prije sniženja?

25. Ako cijena goriva na benzinskoj crpki poraste za 4%, a potom još za 4%, koliko je ukupno povećanje?

26. Cijena neke robe povisi se za 12%. Za koliko postotaka bi se trebala umanjiti ta povećana cijena kako bi se vratila na staru?

27. U nekom razredu na pismenom su ispitu postavljena dva zadatka. Prvi je uspješno riješilo 72% učenika, drugi 76%, a oba zadatka riješilo ih je 12. Svaki je učenik riješio barem jedan zadatak. Koliko je učenika u tom razredu?

28. Izračunajte:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{25}\right)^{-0.5}.$$

29. Koliko je:

$$[4^{-0.25}+(3\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}}]\cdot[4^{-0.25}-(3\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}}].$$

30. Koliko je:
$|1-\sqrt{2}|-|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{4}|-\ldots-|\sqrt{99}-\sqrt{100}|$?

Pojednostavnite:

31. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3b}-\sqrt[4]{ab^3}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)^{-4}$.

32. $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}:\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}}}$.

33. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}:\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}$.

34. Izračunajte vrijednost brojevnog izraza $\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-2}\right)^{0.75}:\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^3\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-3}$, za $a=\dfrac{16}{81}$, $b=0.01$.

35. Racionalizirajte nazivnik u razlomku $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$.

36. Racionalizirajte nazivnik u razlomku $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

37. Racionalizirajte nazivnik u razlomku $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-1}$.

38. Koliko je $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[8]{a})(1+\sqrt[16]{a})(1-\sqrt[16]{a})$, za $a=2$?

39. Pojednostavnite:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{2}{3}}-ba^{\frac{2}{3}}}+\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{2}{3}}+ba^{\frac{2}{3}}}.$$

40. Pojednostavnite:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right).$$

1. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Neka je n najveća zajednička mjera brojeva 210, 168, i 63. Zbroj znamenki broja n jednak je:

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

2. Ako je $a:b=1:2$, $b:c=1:3$ te $a+b+c=27$, onda je umnožak abc jednak:

A. 512 **B.** 108 **C.** 324 **D.** 212

3. Zbroj najmanjeg i najvećeg troznamenkastog broja koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 5 jednak je:

A. 1012 **B.** 1102 **C.** 1120 **D.** 1210

4. Broj $n=3\cdot10^3+2\cdot10+10^{-1}+10^{-2}$ zapisan u standardnom obliku je broj:

A. 3020.11 **B.** 321.11 **C.** 32.11 **D.** 3120.11

5. Ako je $a=0.\dot{2}\dot{7}$, onda je recipročna vrijednost broja a jednaka:

A. 27 **B.** $3\frac{2}{3}$ **C.** $1\frac{1}{9}$ **D.** 9

6. Izraženo u postocima 3 sekunde od 3 sata čine:

A. $\frac{1}{36}\%$ **B.** $\frac{1}{30}\%$ **C.** $\frac{1}{360}\%$ **D.** $\frac{1}{12}\%$

7. Aritmetička sredina dvaju brojeva jednaka je 5, geometrijska sredina je 4. Apsolutna vrijednost razlike tih dvaju brojeva jednaka je:

A. 2 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

8. Umnožak a^3b^3 brojeva $a=5\cdot10^8$ i $b=0.04\cdot10^{-5}$ jednak je:

A. $8\cdot10^6$ **B.** $5\cdot10^6$ **C.** $4\cdot10^5$ **D.** 10^7

9. Jednostavniji zapis razlomka $\dfrac{(x^{-1}-y^{-1})^{-2}}{(x^{-2}-y^{-2})^{-1}}$ je:

A. $\dfrac{1}{y+x}$ **B.** $\dfrac{x-y}{y+x}$ **C.** $\dfrac{x+y}{y-x}$ **D.** 1

10. Vrijednost brojevnog izraza $\sqrt[3]{8x}-\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$ za $x=3^{-3}$ jednaka je:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 2 **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** 6

POSTANSKA I TELEKOMUNIKACIJSKA ŠKOLA
KNJIŽNICA

Ispit 2

1. Posljednja znamenka umnoška prvih 50 prostih brojeva jest:
   A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

2. Ako je $22_{(b)} \cdot 33_{(b)} = 1331_{(b)}$, koliko je u istom brojevnom sustavu $23_{(b)} \cdot 32_{(b)}$?
   A. $3413_{(b)}$ **B.** $1341_{(b)}$ **C.** $1431_{(b)}$ **D.** $1134_{(b)}$

3. Rješenje jednadžbe $x + 2x + 3x + \ldots + 111x = 259$ je:
   A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

4. U kinodvorani je 50 redova, u svakom je redu 25 sjedala. Ako je u svakom redu po pet praznih sjedala popunjenost dvorane je:
   A. 70% **B.** 75% **C.** 80% **D.** 90%

5. Ako je $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, $\frac{c}{d} = \frac{2}{5}$, $\frac{d}{b} = \frac{6}{7}$, koliko je $\frac{a}{c}$?
   A. $\frac{1}{7}$ **B.** $\frac{5}{36}$ **C.** $\frac{35}{36}$ **D.** $\frac{6}{7}$

6. Razlomak $\frac{0.25}{0.\dot{2}\dot{5}}$ jednak je broju:
   A. $\frac{1}{25}$ **B.** 0.99 **C.** $\frac{100}{99}$ **D.** $\frac{1}{9}$

7. Geometrijska sredina dvaju pozitivnih realnih brojeva je 2, zbroj njihovih kvadrata je 8. Aritmetička sredina tih brojeva iznosi:
   A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16

8. $(4^{-\frac{3}{2}} - 8^{-\frac{2}{3}})^{-2} =$
   A. 64 **B.** 0.5 **C.** -1 **D.** -0.8

9. $\dfrac{|4 - \sqrt{18}| + |3 - \sqrt{8}|}{|4 - \sqrt{2}| - |\sqrt{8} - 3|} =$
   A. $2\sqrt{2} - 1$ **B.** $3 - 2\sqrt{2}$ **C.** $2 - \sqrt{2}$ **D.** $1 + 2\sqrt{2}$

10. Koliko dugo će putovati radiosignal, koji se kreće brzinom svjetlosti ($3 \cdot 10^5$ km/ s), s Marsa do Zemlje ako je udaljenost ovih dvaju planeta jednaka $1.38 \cdot 10^8$ km?
    A. 12 sati **B.** 20 min 15 sek **C.** 1 h 24 min **D.** 7 min 40 sek

Ispit 3

1. Zbroj šest uzastopnih cijelih brojeva iznosi 1 275. Najmanji od njih djeljiv je s:
   A. 10 **B.** 25 **C.** 40 **D.** 100

2. Ako su $\frac{2}{3}$ nekog broja jednake 7, onda je $\frac{4}{7}$ tog broja jednako:
   A. 12 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 8

3. Koliko ima cijelih brojeva n, $1 \leq n \leq 100$ koji nisu djeljivi ni s 2, ni s 3?
   A. 33 **B.** 50 **C.** 42 **D.** 67

4. Ako je $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ te je $a = 10^{-2}$, $b = 10^2$, tada je:
   A. $x = 100.01$ **B.** $x = 101$ **C.** $x = 101.1$ **D.** $x = 111.1$

5. Od četiri dana broja tri su iracionalna, jedan je racionalan. To je broj:
   A. $\sqrt{1.44^{-1}}$ **B.** 2π **C.** $\sqrt[4]{0.16}$ **D.** $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$

6. Ako je $2^{10} \cdot 5^{12} = n \cdot 10^8$, onda je:
   A. $n = 2.5$ **B.** $n = 25$ **C.** $n = 250$ **D.** $n = 2\,500$

7. Obujam bakterije jednak je 0.00000000000000025 m^3. Zapisan u znanstvenom obliku taj broj glasi:
   A. $25 \cdot 10^{-15}$ **B.** $2.5 \cdot 10^{16}$ **C.** $2.5 \cdot 10^{-16}$ **D.** $2.5 \cdot 10^{-17}$

8. Ako je 15% od x jednako 24% od 210, onda je:
   A. $x = 336$ **B.** $x = 450$ **C.** $x = 240$ **D.** $x = 330$

9. Vrijednost brojevnog izraza $\dfrac{2^{-3} + 3^{-3}}{2^{-2} - 3^{-2}} : \dfrac{2^{-2} + 3^{-2}}{2^{-3} - 3^{-3}}$ jednaka je:
   A. $\frac{133}{1\,296}$ **B.** $\frac{133}{468}$ **C.** $\frac{11}{13}$ **D.** $\frac{135}{246}$

10. $(\sqrt{3} - 1)^2 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) =$
    A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Ispit 4

1. Broj $\overline{35x7y0}$ djeljiv je sa 6. Tada umnožak znamenki xy ne može biti jednak:
   A. 5 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 35

2. Zbroj svih cijelih brojeva n za koje je i razlomak $\frac{6}{n+1}$ cijeli broj jednak je:
   A. 4 **B.** 6 **C.** -8 **D.** -10

3. S $a \circ b = a - ab + b$ zadana je algebarska operacija u skupu realnih brojeva. Ako je $3 \circ (x \circ 2) = 9$, onda je:
   A. $x = 7$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 5$ **D.** $x = 1$

4. U nekoj je brojevnoj bazi točna jednakost $22 + 33 = 121$. U istoj je bazi onda $22 \cdot 33$ jednako:
   A. 1 212 **B.** 2 121 **C.** 1 122 **D.** 2 112

5. Ako je $x = 0.1$, $y = 0.01$, $xyz = 1$, tada je:
   A. $z = 0.001$ **B.** $z = 1\,000$ **C.** $z = 10$ **D.** $z = 0.1$

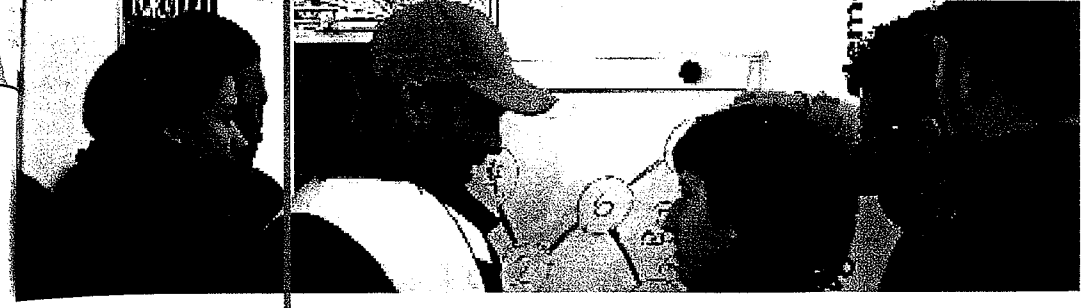
6. Prikazan u obliku potencije s bazom 3 zbroj $5 \cdot 9^5 + 4 \cdot 27^3 + 8 \cdot 3^9$ jednak je:
   A. 3^{13} **B.** 3^{12} **C.** 3^{14} **D.** 3^{11}

7. Najmanji od brojeva $a = 0.01$, $b = 100^{-1.5}$, $c = 0.1^{-2}$, $d = \sqrt[4]{0.001}$ jest broj:
   A. a **B.** b **C.** c **D.** d

8. Ako je $a = 4^{n+1}$, $b = 25^{n-1}$ te $n \geq 1$, onda je umnožak ab broj koji ima:
   A. $2n$ znamenki **B.** $n + 1$ znamenku **C.** $n + 2$ znamenke **D.** $2n + 1$ znamenki

9. Broj $(4^{-1} - 5^{-1})^{-2}$ jednak je:
   A. -9 **B.** 12 **C.** 41 **D.** 400

10. Površina Hrvatske jednaka je 56 542 km^2, površina Zemlje je 510 000 000 km^2. Omjer tih dviju površina jednak je:
    A. $1.1 \cdot 10^{-4}$ **B.** $1.2 \cdot 10^{-3}$ **C.** 10^{-5} **D.** $0.11 \cdot 10^{-6}$



2. lekcija

Algebarski izrazi

2. lekcija Ponovimo

Algebarski izrazi

Algebarskim izrazom nazivamo bilo koji izraz koji čine varijable i konstante, a dobiven je pomoću četiri osnovne algebarske operacije i uporabom zagrada.

Najjednostavniji algebarski izraz je **monom**. On je dobiven operacijom množenja konstanti i varijabli. Tako su, na primjer, $2x$, a^2b, $-3abc$ monomi.

Zbroj dvaju monoma naziva se **binom**. Tako su, na primjer, $3xy + y^2$, $a - 2b$, $2x^2 - 1$ binomi. Za njih kažemo da imaju dva **člana**.

Općenito je **polinom** algebarski izraz dobiven samo operacijama zbrajanja (oduzimanja) i množenja. Onda je polinom koji ima točno dva člana binom, a polinom s točno tri člana naziva se **trinom**. Tako, na primjer, za izraz $(2a + b)^2$ kažemo da je **kvadrat binoma**, dok je $4a^2 + 4ab + b^2$ **trinom**.

Osnovni algebarski identiteti

- Kvadrat zbroja i razlike:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

- Kub zbroja i razlike:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

- Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

- Razlika i zbroj kubova:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2).$$

- Kvadrat trinoma:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

- Razlika dviju potencija jednakih eksponenata:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

- Zbroj potencija jednakih eksponenata:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Zbroj dviju potencija jednakih eksponenata možemo rastaviti u umnožak jedino ako je eksponent neparan broj.

Rastavljanje na faktore

Jedno od svojstava množenja i zbrajanja realnih brojeva jest i svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju. Zapisujemo ga na sljedeći način:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

To svojstvo vrijedi za svaka tri realna broja a, b i c i primjenjujemo ga pri množenju višečlanih algebarskih izraza.

Čitamo li pravilo zdesna ulijevo:

$$a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c),$$

kažemo da smo dvočlan izraz $ab + ac$ zapisali u obliku umnoška, ili da smo **izlučili zajednički faktor**, ili naprosto, da smo ga **rastavili na faktore.**

U dvama pribrojnicima valja uočiti njihov najveći zajednički djelitelj, tj. najveći broj koji je **faktor** i jednog i drugog, te ga **izlučiti ispred zagrade.**

Jednako postupamo kada je u zagradi nekoliko pribrojnika.

Algebarski razlomci

Algebarski razlomak je količnik dvaju polinoma.

Razlomci:

$$\frac{m}{m+1}, \quad \frac{a+b}{a-b}, \quad \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}, \quad \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2},$$

gdje su a, m, b i x neki realni brojevi (varijable), primjeri su algebarskih razlomaka.

S algebarskim razlomcima postupat ćemo jednako kao što smo to činili s običnim razlomcima — racionalnim brojevima.

Binomni poučak

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo sa $n!$ i čitamo *"en faktorijela"*.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Prema definiciji je $0! = 1$.

Neka je n prirodan broj i neka je k prirodan broj ili nula te je $k \leq n$. **Binomni koeficijent** je broj

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Prema definiciji je

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Za svaka dva realna broja a i b te prirodni broj n vrijedi **binomni poučak**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

U razvoju binoma $(a+b)^n$ na $(k+1)-$vom mjestu nalazi se član

$$\binom{n}{k}a^k b^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Pascalov trokut je shema u čijem su n-tom retku recima ispisani binomni koeficijenti u raspisu potencije $(a+b)^n$:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 \quad 1 \\
n=6 & 1 & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & 6 \quad 1 \\
n=7 & 1 & 7 & 21 & & 35 & & 35 & 21 & 7 \quad 1 \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

2. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Ako je $(x-1)(x-3) = 4$, koliko je $(x-2)^2$?

Rješenje. Iz $(x-1)(x-3) = 4$ slijedi $x^2 - 4x = 1$. Dalje imamo: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 = 1 + 4 = 5$.

Primjer 2.

Rastavimo u faktore razliku šestih potencija $x^6 - y^6$.

Rješenje. Uočimo kako je riječ o *razlici kubova* brojeva x^6 i y^6. Dani izraz možemo zapisati kao $(x^2)^3 - (y^2)^3$ te ga raspisati na sljedeći način:

$$(x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x-y)(x+y)(x^4 + x^2y^2 + y^4).$$

No, isti smo izraz $x^6 - y^6$ mogli zapisati u obliku *razlike kvadrata*: $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$. Dalje raspisujemo:

$$(x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

Uspoređujući dobivene rezultate, zaključit ćemo da je:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

Zaista, umnožak s desne strane posljednje jednakosti, *razlika je kvadrata* i imamo:

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = (x^2+y^2)^2 - (xy)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = x^4 + x^2y^2 + y^4.$$

Primjer 3.

Odredimo zbroj kvadrata i zbroj kubova dvaju brojeva ako je njihov zbroj jednak 1, a umnožak 2.

Rješenje. Odredimo najprije zbroj kvadrata. Kvadriranjem jednakosti $x+y = 1$, dobije se:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1,$$

odakle slijedi $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$, odnosno $x^2 + y^2 = -3$.

Analogno se dobije kubiranjem iste jednakosti:

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 1, \quad \text{te je} \quad x^3 + y^3 = 1 - 3xy(x+y) = -5.$$

Primijetite kako općenito, za sve realne brojeve a i b, vrijedi:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab; \qquad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b).$$

Primjer 4.

Skratimo razlomak $\dfrac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}$.

Rješenje. U brojniku razlomka imamo *kvadrat razlike*, $a^4-2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2$, a u nazivniku je *razlika kvadrata* $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ pa imamo:

$$\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}=\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Primjer 5.

Ako je $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}$, koliko je $f(1-\sqrt{2})$?

Rješenje. Najprije primijetimo kako je:

$$1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2.$$

Tako je: $f(x)=\sqrt{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2}=\left|\dfrac{x}{x+1}\right|=\dfrac{|x|}{|x+1|}$.

I sada uvrstimo $x=1-\sqrt{2}$, pa imamo: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Primjer 6.

Pojednostavnimo brojevni izraz $\left(1-\dfrac{1}{1-\dfrac{a^2}{a-1}}\right)\cdot\dfrac{a^3+1}{a^2}$.

Rješenje. Izračunajmo najprije $1-\dfrac{a^2}{a-1}=\dfrac{a-1-a^2}{a-1}$ i kad to "vratimo" u izraz u zagradi, imat ćemo:

$$1-\frac{a-1}{a-1-a^2}=\frac{-a^2}{a-1-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+1}.$$

Konačno je $\dfrac{a^2}{a^2-a+1}\cdot\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2}=a+1$.

Primjer 7.

Izračunajmo:

$$\left(\frac{a+b}{a^2b-ab^2}-\frac{a-b}{a^2b+ab^2}\right)\cdot\frac{a^4-b^4}{4}.$$

Rješenje. Zadatak najprije zapišimo u obliku:

$$\left(\frac{a+b}{ab(a-b)}-\frac{a-b}{ab(a+b)}\right)\cdot\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{4}.$$

Pomnožimo li sada dvočlani izraz u zagradi s a^2-b^2, dobit ćemo:

$$\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}\right)\cdot\frac{a^2+b^2}{4}.$$

I dalje imamo:

$$\left(\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}\right)\cdot\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{4ab}{ab}\cdot\frac{a^2+b^2}{4}=a^2+b^2.$$

Primjer 8.

Ako je $I(x,y)=\left(\dfrac{x+y}{x^2-xy}-\dfrac{2y-x}{xy-y^2}\right):\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}\right)$, koliko je: $I(\sqrt{2},\sqrt{3})\cdot I(\sqrt{3},\sqrt{5})$?

Rješenje. Najprije ćemo provesti algebarske operacije naznačene unutar dviju zagrada:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y}{x(x-y)}-\frac{2y-x}{y(x-y)}\right):\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}&=\frac{y(x+y)-x(2y-x)}{xy(x-y)}\cdot\frac{x^3y^3}{x^3+y^3}\\&=\ldots=\frac{x^2-xy+y^2}{xy(x-y)}\cdot\frac{x^3y^3}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Sada provedemo uvrštavanje pa imamo:

$$I(\sqrt{2},\sqrt{3})\cdot I(\sqrt{3},\sqrt{5})=\frac{2\cdot3}{2-3}\cdot\frac{3\cdot5}{3-5}=45.$$

Primjer 9.

Pojednostavnimo: $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{xy^{-3}-x^{-3}y}\cdot\dfrac{x^3y^{-1}-y^3x^{-1}}{x^{-1}y+xy^{-1}}$.

Rješenje. Zadatak se primjenom jednakosti $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ može svesti na računanje s dvojnim razlomcima. No moguća su i druga, možda i jednostavnija rješenja. Izlučimo iz pojedinih algebarskih izraza neke faktore, kako se to može vidjeti u zapisu i potom provedemo kraćenje:

$$\frac{x^{-2}+y^{-2}}{xy^{-3}-x^{-3}y}\cdot\frac{x^3y^{-1}-y^3x^{-1}}{x^{-1}y+xy^{-1}}=\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-3}y^{-3}(x^4-y^4)}\cdot\frac{x^{-1}y^{-1}(x^4-y^4)}{xy(x^{-2}+y^{-2})}.$$

Nakon kraćenja ostaje nam razlomak $\dfrac{x^{-1}y^{-1}}{x^{-2}y^{-2}}$ pa je konačan rezultat zadatka xy.

Primjer 10.

Izračunajmo: $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}$.

Rješenje. Zadatak zapišimo u obliku: $\dfrac{(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})}{y^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})}+\dfrac{(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})}$.

Nakon kraćenja razlomaka, nastavljamo s računanjem:

$$\frac{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}}+\frac{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})+y^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}.$$

Primjer 11.

Pojednostavnimo: $\left[\dfrac{1}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right]\cdot(ab)^{-1}$.

Rješenje. Primijetimo odmah kako je $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3-(b^{\frac{1}{2}})^3$ razlika kubova koju možemo raspisati kao $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)$.

Tako onda dani izraz možemo redom pojednostavnjivati:

$$\begin{aligned}&\left[(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot\frac{1}{ab}\\&=\left[(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2-(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)\right]\cdot\frac{1}{ab}\\&=\left(a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b-a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b\right)\cdot\frac{1}{ab}=\frac{\sqrt{ab}}{ab}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

Primjer 12.

Odredimo 100. član u raspisu potencije $(x-y)^{101}$.

Rješenje. Stoti član u raspisu dane potencije je jednak

$$\binom{101}{99}x^2\cdot(-y)^{99}=\frac{101\cdot100}{2}x^2\cdot(-y)^{99}=-5555x^2y^{99}.$$

Primjer 13.

Zbroj svih koeficijenata u raspisu potencije $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ jednak je 512. Ako postoji, odredimo slobodni član tog polinoma.

Rješenje. Uvrstimo li $x=1$ u $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$, dobit ćemo 2^n i to je zbroj svih koeficijenata polinoma kojeg dobijemo nakon provedenog potenciranja. Iz jednakosti $2^n=512$ slijedi $n=9$.

Opći član raspisa je oblika $\binom{9}{k}(x^2)^{9-k}\cdot(x^{-1})^k=\binom{9}{k}x^{18-3k}$. Očito je da se za $k=6$ dobije slobodni član, član koji *ne sadrži* x. Taj, sedmi član jednak je $\binom{9}{6}=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}=84$.

Primjer 14.

Nakon provedenog potenciranja $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{12}$ dobije se iracionalan broj koji je zbroj iracionalnog i cijelog broja. Odredimo taj cijeli broj.

Rješenje. Opći, $(k+1)$-vi član u raspisu dane potencije jednak je

$$\binom{12}{k}(\sqrt[3]{2})^k(\sqrt{3})^{12-k}=\binom{12}{k}2^{\frac{k}{3}}\cdot3^{6-\frac{k}{2}},\quad 0\le k\le 12.$$

Zaključujemo da k mora biti djeljiv sa dva i sa tri, dakle djeljiv sa 6. Imamo tri mogućnosti:

Za $k=0$ (1. član raspisa) imamo $\binom{12}{0}3^6=729$.

Za $k=6$ (7. član raspisa) imamo $\binom{12}{6}3^3\cdot2^2=924\cdot27\cdot4=99\,792$.

Za $k=12$ (13., posljednji član) imamo $\binom{12}{12}2^4=16$.

Traženi cijeli broj je 100 537.

2. lekcija Zadaci

1. Ako je $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{2}$, koliko je $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$?

2. Ako je $a \neq b$ i $\frac{a}{b}+a=\frac{b}{a}+b$, koliko je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$?

3. Izračunajte:
$$\frac{21.3^2+11.3^2-2\cdot 21.3\cdot 11.3}{13.2^2-11.8^2}.$$

4. Ako je $m+n=1$, te $m^2+n^2=2$, koliko je m^4+n^4?

5. Ako je $x+\frac{1}{x}=3$, koliko je $x^4+\frac{1}{x^4}$?

6. Ako je $2x^2+5y^2+z^2-4xy+2xz+2y+1=0$, koliko je $x+y+z$?

7. Skratite razlomke:

1) $\frac{(x^2-y^2)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2-x+y}$;

2) $\frac{(1-3x)^2-(x+1)^2}{2x^3-2x}$.

8. Izračunajte:
$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(1-\frac{a-b}{ab}\right)\cdot\left(1-\frac{b-a}{ab}\right).$$

9. Pojednostavnite:

1) $\left(1-\frac{(a+b)^2}{4ab}\right):\frac{4a^4b-4ab^4}{a^2+ab+b^2}$;

2) $\left(\frac{3}{x^2+xy+y^2}-\frac{1}{x^2-xy+y^2}\right)\frac{x^6-y^6}{(x-y)^4}$.

10. Izračunajte:
$$\frac{a^3-1}{1+\frac{1}{a-\frac{a}{a+1}}}.$$

11. Pojednostavnite:
$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc}.$$

12. Ako je:
$$I(a,b)=\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}+\frac{b^2-1}{ab-a+b^2-b},$$
izračunajte $I(3,2)\cdot I(4,2)$.

13. Skratite razlomke:
$$\frac{4^n-2\cdot 10^n+25^n}{25^n-4^n}.$$

14. Izračunajte:

1) $0.04^{-1.5}\cdot\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$;

2) $\left[\left(16^{0.75}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

15. Izračunajte:

1) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{8\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}:\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}$.

16. Pojednostavnite:
$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

17. Pojednostavnite:
$$\frac{(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}.$$

2. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Ako je $x-y=3$ i $x^2+y^2=5$, onda je:
A. $xy=-5$ **B.** $xy=15$ **C.** $xy=-2$ **D.** $xy=25$

2. Ako je $a(a-1)=\frac{1}{2}$, onda je $(2a-1)^2$ jednako:
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

3. Razlika kvadrata dvaju uzastopnih neparnih cijelih brojeva jednaka je 40. Zbroj kvadrata tih brojeva jednak je:
A. 101 **B.** 202 **C.** 303 **D.** 404

4. Ako je $x=333\,333\,333^2$, $y=333\,333\,332\cdot 333\,333\,334$, onda je:
A. $x-y=1$ **B.** $y=x+1$ **C.** $y-x=1$ **D.** $x=(y-1)^2$

5. Umnožak $(x+a)(x^2+bx+4)$ razlika je kubova. Tada je:
A. $a+b=-4$ **B.** $a+b=6$ **C.** $a+b=0$ **D.** $a+b=-6$

6. Vrijednost brojevnog izraza x^3-3x^2+3x-1 za $x=1-10^{-3}$ jednaka je:
A. -10^{-9} **B.** -10^6 **C.** -10^9 **D.** 10^3-1

7. Jedan faktor polinoma $a^3+2a^2b^2-3ab-6b^3$ jest $a+2b^2$. Drugi je faktor istog polinoma:
A. a^2-3 **B.** $a-3b^2$ **C.** $a-3b$ **D.** a^2-3b

8. Broj cijelih brojeva n za koje je razlomak $\frac{n^2-2n+3}{n-2}$ cijeli broj jednak je:
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

9. Nakon kraćenja, razlomak $\frac{(2x-1)^2+8x}{1-4x^2}$ ima oblik:
A. $-\frac{2x+1}{2x-1}$ **B.** $\frac{1}{1-2x}$ **C.** $\frac{2x-1}{2x+1}$ **D.** $\frac{2x}{2x-1}$

10. Izraz $\left(\frac{b}{1-\frac{a}{b}}+\frac{a}{1-\frac{b}{a}}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}}$ za $a\neq b\neq 0$ identičan je razlomku:
A. $\frac{b^2}{b-a}$ **B.** $\frac{a^2}{a-b}$ **C.** $\frac{1}{a-b^2}$ **D.** $\frac{1}{ab}$

Ispit 2

1. Ako je $A = (1-x)(1+x^2)$, $B = (1+x)(1+x^4)$, onda je vrijednost polinoma $AB - 1$ za $x = \sqrt[4]{8}$ jednaka:
   A. -64 **B.** 7 **C.** 32 **D.** -11

2. U raspisu potencije $(3a - 4b)^3$ koeficijent k uz član koji sadrži ab^2 jednak je:
   A. 72 **B.** -36 **C.** 144 **D.** -96

3. Vrijednost brojevnog izraza $4.13^2 + 8.26 \cdot 5.87 + 5.87^2$ jednaka je:
   A. 110 **B.** 100 **C.** 90 **D.** 80

4. Ako je $(4x-3)(2x-1) = 5$, koliko je $(x-1)(4x-1)$?
   A. 1.5 **B.** 2 **C.** 2.5 **D.** 3

5. Vrijednost brojevnog izraza $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$ za $x = 11.5$, $y = -8.5$ jednaka je:
   A. 1200 **B.** 120 **C.** 400 **D.** 180

6. Polinom $x^2 - 3x + a$ djeljiv je s $x - 2$ ako je:
   A. $a = 2$ **B.** $a = 4$ **C.** $a = 6$ **D.** $a = 0$

7. Ako je $\dfrac{3a-b}{a+3b} = 2$, koliko je $\dfrac{a-3b}{3a+b}$?
   A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{2}{11}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

8. Za svaku vrijednost od m i n vrijednost razlomka $\dfrac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$ jednaka je:
   A. $\dfrac{1}{12}$ **B.** $\dfrac{1}{36}$ **C.** 1 **D.** $-\dfrac{1}{6}$

9. Ako je $\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{1}{2}$, onda je $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$ jednako:
   A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** 2 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 8

10. $\left(1 - \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right) : \left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right) =$
    A. $\dfrac{c(a+b-c)}{2}$ **B.** $\dfrac{b(a+c-b)}{2}$ **C.** $\dfrac{a(b+c-a)}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{abc}$

Ispit 3

1. Jedan linearni faktor polinoma $4x^2 + 4x - 3$ je $2x - 1$. Drugi je faktor:
   A. $2x - 3$ **B.** $2x + 1$ **C.** $2x + 3$ **D.** $x - 3$

2. Ako je $(2a-1)^3 = m$, onda je $(3-6a)^3$ jednako:
   A. $-3m$ **B.** $-9m$ **C.** $-27m$ **D.** $-m^2$

3. Vrijednost izraza $a^2 - b^2 + c^2 + 2ac$ za $a = 101$, $b = 100$, $c = 99$ jednaka je:
   A. $3 \cdot 10^3$ **B.** $3 \cdot 10^4$ **C.** $3 \cdot 10^5$ **D.** $3 \cdot 10^6$

4. Nakon kraćenja razlomka $\dfrac{x^4 - y^4}{(x-2y)^2 - (2x-y)^2}$ jest razlomak:
   A. $-\dfrac{x^2+y^2}{3}$ **B.** $\dfrac{x-y}{3}$ **C.** $\dfrac{x^2-y^2}{3}$ **D.** $-\dfrac{x+y}{3}$

5. Za $x < -1$ razlomak $\dfrac{x^2 - |x+1| - 1}{|x| - 1}$ jednak je:
   A. $x - 2$ **B.** $-x$ **C.** $x + 1$ **D.** $x^2 - 1$

6. Jednostavniji zapis algebarskog izraza $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{a^{-1}} - \dfrac{1}{b^{-1}}\right)$ jest:
   A. $-ab$ **B.** 1 **C.** $a - b$ **D.** $\dfrac{a}{b}$

7. Vrijednost brojevnog izraza $(x^2-1)^3 \cdot (x^2+1)^3$ za $x = \sqrt[4]{3}$ jednaka je:
   A. 8 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

8. Vrijednost razlomka $\dfrac{(m-n)^2 + 4mn}{(m+n)^2 - 4mn}$ za $m = 111\,111$, $n = 777\,777$ jednaka je:
   A. $\dfrac{1}{49}$ **B.** $\dfrac{16}{9}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{6}$

9. Ako je $I(a,b) = \left(\dfrac{a+b}{a^2-ab} - \dfrac{a+b}{a^2-b^2}\right) \cdot \dfrac{a^2-2ab+b^2}{4ab}$, koliko je $I(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$?
   A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $-\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. Ako je $(a + b\sqrt{2})^2 = 9 + 4\sqrt{2}$, onda je:
    A. $ab = 6$ **B.** $ab = 4$ **C.** $ab = 3$ **D.** $ab = 2$

POŠTANSKA I TELEKOMUNIKACIJSKA ŠKOLA
KNJIŽNICA
ZAGREB Kenedyev trg 9

Ispit 4

1. Polinom $8x^3 - 36x^2 + ax + b$ je kub binoma $mx + n$. Tada je:
   A. $m + n = 0$ **B.** $m + n = -1$ **C.** $m + n = -2$ **D.** $m + n = -3$

2. Za svaki cijeli broj n broj $(5n - 3)^2 - (n + 1)^2$ djeljiv je s:
   A. 5 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 9

3. Koji od sljedećih dvočlanih izraza nije fektor polinoma $a^6 - b^6$?
   A. $a^2 - b^2$ **B.** $a^2 + b^2$ **C.** $a - b$ **D.** $a^2 - ab + b^2$

4. Ako je $x + y = 3$, $x^2 + y^2 = 5$, onda je $x^3 + y^3$ ednako:
   A. 15 **B.** 13 **C.** 21 **D.** 9

5. Broj rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ u skupu cijelih brojeva jednak je:
   A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

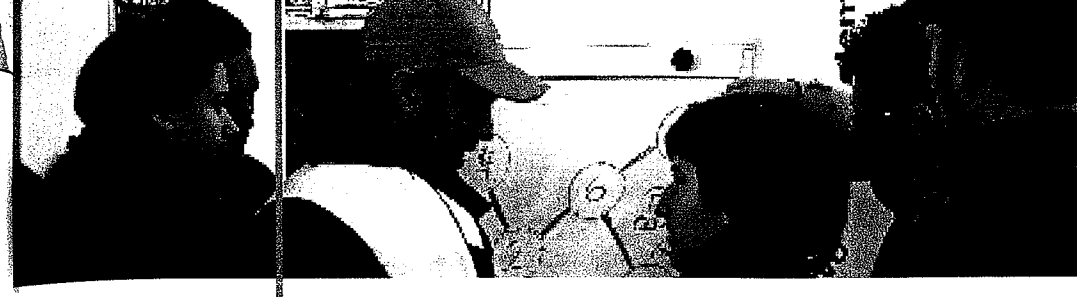
6. Aritmetička sredina svih cijelih brojeva n za koje je razlomak $\frac{2n^2 + 4n + 3}{n + 2}$ cijeli broj, jednaka je:
   A. -4 **B.** 3 **C.** -5 **D.** -2

7. Nakon kraćenja, razlomak $\frac{(2x - 3)^2 - (3x - 2)^2}{x^4 - 2x^2 + 1}$, $|x| \neq 1$, prima oblik:
   A. $\frac{5}{1 - x^2}$ **B.** $\frac{1}{x^2 + 1}$ **C.** $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **D.** $\frac{x^2}{x - 1}$

8. Vrijednost razlomka $\frac{x - y}{x + y}$ za $x = \frac{ab}{a - b}$, $y = \frac{ab}{a + b}$ jednaka je:
   A. $\frac{a + b}{a - b}$ **B.** $\frac{a - b}{a + b}$ **C.** $\frac{b}{a}$ **D.** $\frac{1}{ab}$

9. Jednostavniji zapis algebarskog izraza $\frac{x^{-3} + y^{-3}}{x^{-2} - y^{-2}} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right)^{-1}$ jest:
   A. $\frac{1}{y - x}$ **B.** $x^{-1} - y^{-1}$ **C.** $\frac{x - y}{xy}$ **D.** $\frac{1}{xy}$

10. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} : \sqrt[3]{2\sqrt{2}} =$
    A. $\sqrt[3]{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt[3]{4}$ **D.** $\sqrt[6]{2}$



3. lekcija

Polinomi i algebarske jednadžbe

3. lekcija Ponovimo

Polinomi jedne varijable

Polinom stupnja n je funkcija $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana s:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, \ldots, a_n$ nazivamo **koeficijentima** polinoma. Koeficijent a_n nazivamo **vodećim koeficijentom**, koeficijent a_0 **slobodnim koeficijentom**. Gornji zapis nazivamo **kanonskim oblikom** polinoma. Kažemo da je $P(x)$ **polinom jedne varijable**.

Jednakost polinoma

Dva su polinoma P i Q **jednaka** ako za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $P(x) = Q(x)$. Pišemo $P = Q$.

Vrijedi sljedeći **kriterij jednakosti polinoma**: polinomi P i Q jednaki su ako i samo ako su istog stupnja i ako im se koeficijenti u kanonskom prikazu podudaraju.

Dijeljenje polinoma

Polinom P stupnja n pri dijeljenju polinomom Q stupnja m ($m \leqslant n$) daje kao rezultat količnik D (polinom stupnja $n - m$) i ostatak R čiji je stupanj manji od m. Rezultat dijeljenja pišemo ovako:

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{ili} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Ako je ostatak R jednak nuli, onda kažemo da je polinom P **djeljiv** polinomom Q.

Nultočke polinoma i algebarske jednadžbe

Broj x_1 za koji vrijedi $P(x_1) = 0$ naziva se **nultočka** polinoma P. Ako je $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, onda se jednadžba $P(x) = 0$:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

naziva **algebarska jednadžba** n-tog stupnja. Rješenja algebarske jednadžbe su nultočke pripadnog polinoma.

Osnovni stavak algebre. Svaki polinom stupnja $n \geqslant 1$ (s realnim ili kompleksnim koeficijentima) ima nultočku u skupu kompleksnih brojeva.

Ako je z_1 nultočka polinoma $P(z)$, on je onda djeljiv s polinomom $z - z_1$.

Svaki polinom stupnja $n \geqslant 1$ ima točno n nultočaka $z_1, \ldots, z_n$ (od kojih neke mogu biti jednake). Kažemo da je z_1 nultočka **kratnosti** k polinoma P ako se on može napisati u obliku:

$$P(z) = (z - z_1)^k Q(z),$$

pri čemu je Q polinom sa svojstvom $Q(z_1) \neq 0$.

Svaki se polinom stupnja $n \geqslant 1$ može faktorizirati na sljedeći način:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n),$$

gdje su $z_1, \ldots, z_n$ njegove nultočke.

Cjelobrojne i racionalne nultočke

Ako je cijeli broj k nultočka polinoma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je a_0 djeljiv s k. Ako je racionalni broj $\frac{p}{q}$ (p i q relativno su prosti) nultočka toga polinoma, onda je a_0 djeljiv s p, a a_n s q.

Kompleksne nultočke

Ako je P polinom s realnim koeficijentima, i $z = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$ njegova nultočka, onda je i $\overline{z} = \alpha - i\beta$ nultočka istog polinoma.

Taj polinom djeljiv je s

$$(x - z)(x - \overline{z}) = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

3. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Ako je $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 3$, te $f(-3) = 3$, koliko je $f(3)$?

Rješenje. Za ovu funkciju vrijedi $f(-x) = -ax^5 - bx^3 - cx - 3 = -(ax^5 + bx^3 + cx - 3) - 6 = -f(x) - 6$, za svaki realni broj x. Zato je $f(3) = -f(-3) - 6 = -9$.

Primjer 2.

Koliki je zbroj koeficijenata polinoma $f(x) = (x-2)^{1001}$?

Rješenje. Zbroj koeficijenata svakog polinoma jednak je vrijednosti toga polinoma za $x = 1$. Naime, ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, tada je $f(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$.

Prema tome, za naš je primjer $f(1) = (1-2)^{1001} = (-1)^{1001} = -1$ i to je ujedno zbroj koeficijenata danoga polinoma f.

Primjer 3.

Ako je $f(x+1) = x^3 - 3x + 1$, koliko je $f(-2)$?

Rješenje. Najprije zapišimo: $f(x+1) = (x+1)^3 - 3x^2 - 6x = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3$. Dakle je $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Sada možemo lako izračunati $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 3 = -17$.

No, mogli smo zadatak riješiti i na ovaj način: Stavimo li $x + 1 = -2$, odatle je $x = -3$, te je $f(-2) = -17$.

Primjer 4.

Dokažimo da je polinom $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$ kvadrat polinoma drugog stupnja.

Rješenje. Pokažimo da postoji polinom drugog stupnja $g(x) = x^2 + ax + b$ takav da je $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (x^2 + ax + b)^2$. Primijenimo *teorem o jednakosti polinoma*. Iz jednakosti:

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 25 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2$$

slijedi sustav jednadžbi $2a = 10$ i $a^2 + 2b = 35$. Rješenje je $a = b = 5$. Zadani polinom f kvadrat je polinoma $g(x) = x^2 + 5x + 5$.

No, zadatak smo mogli riješiti i na sljedeći način:

Pomnožimo prvi i četvrti faktor, te drugi i treći u prvom pribrojniku danoga polinoma te nastavimo:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 4) \cdot [(x^2 + 5x + 4) + 2] + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 4)^2 + 2(x^2 + 5x + 4) + 1 \\ &= [(x^2 + 5x + 4) + 1]^2 = (x^2 + 5x + 5)^2. \end{aligned}$$

Primjer 5.

Odredimo realne brojeve a, b i c tako da vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

Rješenje. Pomnožimo ovu jednakost s $x^3 + 1$, zajedničkim višekratnikom triju razlomaka.

Tako dobijemo $1 = a(x^2 - x + 1) + (bx + c)(x + 1)$. Kad ovu jednakost sredimo, ona će primiti oblik $1 = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a + c$.

Kako ta jednakost vrijedi za svaki $x^3 \neq -1$, prema *Teoremu o jednakosti polinoma* onda je $a + b = 0$, $-a + b + c = 0$ i $a + c = 1$.

Rješenje ovog jednostavnog sustava linearnih jednadžbi je $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, te je:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

Kažemo da smo dani razlomak rastavili u *parcijalne razlomke*.

Primjer 6.

Odredimo koeficijent uz x^5 u umnošku polinoma $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ i $g(x) = x^5 - 4x^3 - 3x^2 - 1$.

Rješenje. Da bismo našli koeficijent uz x^5 u polinomu koji je umnožak dvaju danih polinoma, ne moramo množiti te polinome. Naime, lako je zaključiti da će oni članovi koji sadrže x^5 biti $9x^5$, $-8x^5$ i $2x^5$, pa je koeficijent uz x^5 jednak 3.

Primjer 7.

Koliko iznosi ostatak dijeljenja polinoma $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ polinomom $Q(x) = x - 2$?

Rješenje.

$$\begin{array}{l}(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1) : (x - 2) = x^3 + 5x + 9 \\ \underline{-\,(x^4 - 2x^3)} \\ \qquad 5x^2 - x \\ \qquad \underline{-\,(5x^2 - 10x)} \\ \qquad\qquad 9x + 1 \\ \qquad\qquad \underline{-\,(9x - 18)} \\ \qquad\qquad\qquad 19\end{array}$$

Dakle, ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ je 19.

Zadatak se može riješiti i ovako. Pri dijeljenju polinoma $P(x)$ s $x - 2$ dobiva se kvocijent $D(x)$ i ostatak. Taj je ostatak polinom stupnja nula, dakle, konstanta. Rezultat dijeljenja zapisujemo ovako:

$$P(x) = (x - 2)D(x) + C.$$

Za $x = 2$ dobivamo $C = P(2)$. Dakle, $C = 19$.

Primjer 8.

Odredimo a tako da polinom $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + a$ bude djeljiv s $x - 2$.

Rješenje. Zadatak možemo riješiti na dva načina:

Prvi način.

$$\begin{array}{l}(6x^3 - 7x^2 - 16x + a) : (x - 2) = 6x^2 + 5x - 6 \\ \underline{-\,(6x^3 - 12x^2)} \\ \qquad 5x^2 - 16x \\ \qquad \underline{-\,(5x^2 - 10x)} \\ \qquad\qquad -6x + a \\ \qquad\qquad \underline{-\,(-6x + 12)} \\ \qquad\qquad\qquad a - 12\end{array}$$

Ostatak dijeljenja polinoma $P(x)$ i $x - 2$ je $R(x) = a - 12$. *Polinom je djeljiv drugim polinomom ako je ostatak dijeljenja* $R(x) = 0$. Dakle, $a - 12 = 0$, odnosno za $a = 12$ polinom $P(x)$ je djeljiv s $x - 2$.

Napomena. Primijetimo da je ovo specijalan slučaj zadatka u kojem određujemo nepoznati parametar ovisno o zadanoj vrijednosti ostatka. Ako bi se u zadatku tražilo da odredimo a zadanoga polinoma tako da je ostatak dijeljenja broj 5, izjednačili bismo $a - 12 = 5$.

Drugi način. Ako je polinom $P(x)$ djeljiv s $x - 2$, tada je 2 nultočka toga polinoma, odnosno vrijedi:

$$0 = 6 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + a,$$

odakle slijedi $a = 12$.

Primjer 9.

Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^4 - x - 2$ polinomom $g(x) = -x^2 + 1$?

Rješenje. Ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom drugog stupnja jest polinom prvog stupnja ili konstanta. Zato zapisujemo jednakost $f(x) = (-x^2 + 1) \cdot q(x) + ax + b$ koja je ispunjena za svaki realni broj x. Uvrstimo li $x = 1$, dobit ćemo jednadžbu $a + b = -2$, a za $x = -1$ dobit ćemo $a - b = 0$. Iz ovog sustava slijedi $a = b = -1$.

Ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom g jest polinom $r(x) = -x - 1$.

Primjer 10.

Provjerimo da je kompleksni broj $1 - i$ jedno rješenje jednadžbe $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$. Odredimo i ostala rješenja ove jednadžbe.

Rješenje. Najprije provjerimo da je $1 - i$ rješenje jednadžbe. Uvrstimo li taj broj u jednadžbu umjesto x, imat ćemo:

$$(1 - i)^4 - 5(1 - i)^2 + 10(1 - i) - 6 = (-2i)^2 - 5 \cdot (-2i) + 10 - 10i - 6 = 0.$$

Dakle, jest rješenje. No, onda je rješenje i konjugirani broj $1 + i$.

Polinom s lijeve strane jednadžbe djeljiv je polinomom $(x - 1 + i)(x - 1 - i) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

Kada provedemo to dijeljenje, dobit ćemo količnik $x^2 + 2x - 3$. Korijeni ovoga količnika su brojevi 1 i -3.

Dakle ova jednadžba ima četiri rješenja, dva su kompleksna, $1 - i$ i $1 + i$, a dva realna 1 i -3.

3. lekcija Zadaci

1. Ako je $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-1)^2$, koliko je $(a-1)\cdot f(a) - (a+1)\cdot g(-a)$?

2. Ako je $p(x) = a_{101}x^{101} - a_{99}x^{99} + a_{97}x^{97} - \ldots - a_3x^3 + a_1x - 101$, te $p(-1) = 1$, koliko je $p(1)$?

3. Koliki treba biti koeficijent a ako je zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x) = ax^{11} - x^{10} + x^9 - x^8 + \ldots + x - 1$ jednak 13?

4. Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma f ako je $f(x-1) = (x+1)^3$?

5. Ako je $f(x-1) = x^4 - 3x^3 + x - 5$, koliko je $f(1)$?

6. Dan je polinom $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Odredite polinom $g(x)$ takav da je $g(x-1) = f(x)$ za svaki realni broj x.

7. Ako je $x^2 - 3x + 5 = 0$, koliko je $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 7$?

8. Ako je $f(x) = ax^3 + bx + 1$ te $f(-1) = 11$, koliko je $f(1)$?

9. Ako je $f(x) = ax^4 + bx^2 + 1$ te $f(-1) = 1$, koliko je $f(1)$?

10. Polinom $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ je kvadrat nekog polinoma drugog stupnja. Kojeg?

11. Kojeg je stupnja polinom $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^4-1)(x^8-1) + 1$?

12. Odredite koeficijent uz x^3 u raspisu polinoma $f(x) = (x^3 - x^2 - x - 1)^2$.

13. Odredite realne brojeve a i b u rastavu:

1) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$;

2) $\dfrac{x+1}{x^2-x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

14. Podijelite polinom $f(x) = 3x^4 - x^2 + 5x - 1$ polinomom $g(x) = x^2 + x - 1$ i provjerite rezultat.

15. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^7 + 1$ polinomom $g(x) = x^2 - 1$?

16. Podijelite polinom $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x + 1$ polinomom $g(x) = x^2 - x - 1$ i provjerite rezultat.

17. Polinom $f(x) = x^2 + ax + b$ pri dijeljenju s $x+1$ daje ostatak 1, a pri dijeljenju s $x-1$ ostatak 3, odredite a i b.

18. Odredite realne brojeve a i b tako da polinom $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - ax + b$ pri dijeljenju polinomom $x+1$ daje ostatak 7, a pri dijeljenju polinomom $x-1$ ostatak 5.

19. Odredite racionalne korijene jednadžbe:

1) $x^3 - x - 6 = 0$;

2) $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$.

20. Broj $x = -i$ jedno je rješenje jednadžbe $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$. Provjerite to i odredite sva ostala rješenja dane jednadžbe.

21. Broj $x = 1 - i$ jedno je rješenje jednadžbe $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$. Provjerite to i odredite sva ostala rješenja dane jednadžbe.

3. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Ako je $f(x) = x^2 + x + 1$, onda je $(a+1)\cdot f(-a) + (a-1)\cdot f(a)$ jednako:
A. $a^3 + 1$ **B.** $2a^3$ **C.** $a^3 - 1$ **D.** a^3

2. Ako je $f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 - 1$, te $f(-1) = 9$, koliko je $f(1)$?
A. -9 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 9

3. Zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x) = 100x^{100} - 99x^{99} + 98x^{98} - \ldots + 2x^2 - x + 1$ jednak je:
A. 0 **B.** 101 **C.** -1 **D.** 51

4. Stupanj polinoma f jednak je m, stupanj polinoma g je n. Stupanj polinoma $f\cdot g$ jednak je:
A. $m\cdot n$ **B.** $m - n$ **C.** $m + n$ **D.** $\dfrac{m}{n}$

5. Koeficijent člana x^5 u umnošku polinoma $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1$ i $g(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$ jednak je:
A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3

6. Polinom $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ kvadrat je polinoma g:
A. $x^2 - x + 2$ **B.** $x^2 - x - 2$ **C.** $x^2 + x - 2$ **D.** $x^2 - 2x - 1$

7. Pri dijeljenju polinoma f polinomom $x^2 + 1$ dobijemo količnik $x^3 - x + 1$ i ostatak $x - 2$. Tada je:
A. $f(x) = x^5 + x^2 - 1$ **B.** $f(x) = x^5 - 1$
C. $f(x) = x^5 - x^2 + 1$ **D.** $f(x) = x^5 + x^2 + x + 1$

8. Kompleksni broj $z = 1 + i$ korijen je polinoma $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Realni korijen istog polinoma pripada intervalu:
A. $\langle -1.2, -0.5\rangle$ **B.** $\langle -0.2, 0.5\rangle$ **C.** $\langle 0.7, 1.1\rangle$ **D.** $\langle 1.3, 2.2\rangle$

9. Koji od brojeva ne može biti rješenje algebarske jednadžbe $x^4 + ax^2 + bx - 3 = 0$ s realnim koeficijentima?
A. 2 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 3

10. Broj -1 dvostruko je rješenje jednadžbe $x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$. Treće rješenje jednadžbe je broj:
A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

Ispit 2

1. Ako je $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^3 + 1$, onda je $f(a+1) - g(a-1)$ jednako:
A. $2a - 3$ **B.** $6a^2$ **C.** $2a + 3$ **D.** $a - 3$

2. Dan je polinom $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx - 1$. Ako je $f(-2) = 5$, onda je $f(2)$ jednako:
A. -1 **B.** -3 **C.** -5 **D.** -7

3. Zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x) = (x^2 - 2x + 2)^{12} \cdot (x^2 - 5x + 3)^{13}$ iznosi:
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

4. Ako je $f(x+1) = x^3 - 3x + 1$, onda je:
A. $f(-1) = 1$ **B.** $f(-1) = -3$ **C.** $f(-1) = 3$ **D.** $f(-1) = -1$

5. Zbroj koeficijenata a, b i c u jednakosti $\frac{x^2}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$ jednak je:
A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $-\frac{3}{4}$

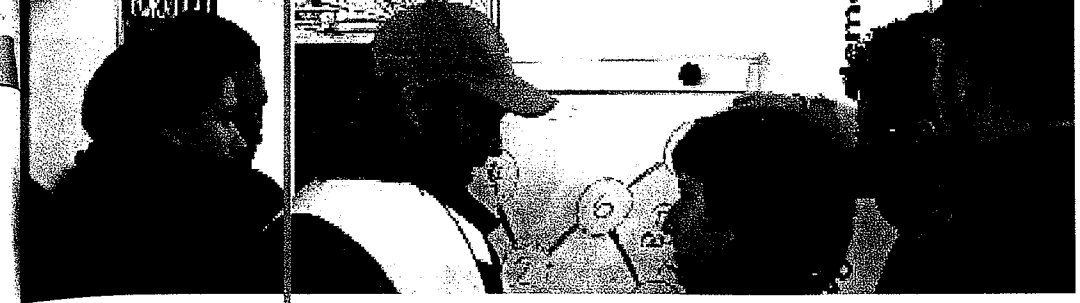
6. Koeficijent uz x^3 u kanonskom zapisu polinoma $f(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 1)^2$ je broj:
A. 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3

7. Polinom $f(x) = x^4 + 4x + 3$ djeljiv je polinomom $g(x) = (x+1)^2$, a količnik je polinom:
A. $q(x) = x^2 - 2x + 3$ **B.** $q(x) = x - 1$
C. $q(x) = x^2 - x - 1$ **D.** $q(x) = x^2 + 3$

8. Ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100} - x^{99} + x^{98} + \ldots + x^2 - x + 1$ polinomom $g(x) = x + 1$ jednak je:
A. 0 **B.** 51 **C.** 101 **D.** 1

9. Polinom $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ djeljiv je polinomom $g(x) = x^2 + 2x + 5$. Tada je:
A. $ab = 75$ **B.** $ab = 15$ **C.** $ab = 150$ **D.** $ab = 24$

10. Ako je $x^2 - x + 2 = 0$, onda je $x^4 - 2x^3 + x^2 + 7$ jednako:
A. 11 **B.** 13 **C.** 15 **D.** 17



4. lekcija

Linearne jednadžbe i problemi prvog stupnja

4. lekcija Ponovimo

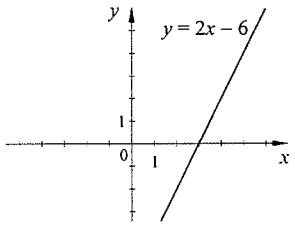
Linearna funkcija

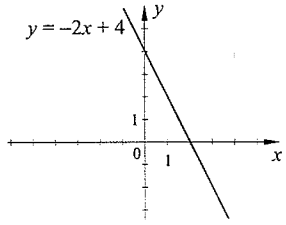
Linearna funkcija je realna funkcija zadana jednadžbom $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

Graf linearne funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu je pravac $y = ax + b$.

Koeficijent a zove se **koeficijent smjera** ili **nagib pravca**.

Ako je a pozitivan broj, pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi x šiljast kut, odgovarajuća linearna funkcija je rastuća (slika lijevo).





Ako je a negativan broj, pravac s pozitivnim smjerom osi x zatvara tupi kut, a pravac monotono pada (slika desno).

Broj x_0 je **nultočka linearne funkcije** $f(x) = ax + b$ ako vrijedi $f(x_0) = 0$. Nultočka linearne funkcije je apscisa točke u kojoj pravac siječe x-os, a računa se po formuli $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Linearne jednadžbe

Linearna jednadžba je jednadžba oblika:

$$a \cdot x + b = 0,$$

gdje je $a \neq 0$.

Riješiti linearnu jednadžbu znači odrediti broj x, tako da za taj broj $ax + b = 0$ bude točna jednakost brojeva. Broj $x = -\frac{b}{a}$ jedinstveno je rješenje jednadžbe.

Dvije jednadžbe su **ekvivalentne** ako imaju isto rješenje.

Svojstva jednakosti

Za realne brojeve a, b i c vrijedi:

1. $a = b$ ako i samo ako je $a + c = b + c$.

Kažemo da se isti broj može dodati na obje strane jednadžbe.

2. Ako je $c \neq 0$, onda $a = b$ vrijedi ako i samo ako je $ac = bc$.

Kažemo da se obje strane jednadžbe mogu pomnožiti brojem različitim od nule.

Linearnu jednadžbu rješavamo tako da je uzastopnom primjenom svojstava jednakosti realnih brojeva svodimo na jednostavniju, ali ekvivalentnu jednadžbu.

Jednadžbe s parametrom

Osim nepoznanice x u linearnoj se jednadžbi može pojaviti i neki opći broj, koji zovemo **parametrom**. Rješavajući takvu jednadžbu ne očekujemo da će njezino rješenje biti konkretan realni broj, već da će ono ovisiti o parametru. Zbog toga rješavanje jednadžbi s parametrom zahtijeva svojevrsnu raspravu.

1. Ako je $a = 0$ a $b \neq 0$, linearna jednadžba $ax + b = 0$ **nema rješenja**. Jer, u suprotnom, bilo bi $0 \cdot x + b = 0$ što nije moguće ni za koji x.
2. Ako je $a = 0$ i $b = 0$, linearna jednadžba $ax + b = 0$ je **neodređena**, njezino je rješenje svaki realni broj x. Naime, za svaki realni broj x vrijedi: $0 \cdot x + 0 = 0$.
3. Ako je $a \neq 0$ linearna jednadžba, $ax + b = 0$ ima **jedinstveno** rješenje. Posebice za $b = 0$ rješenje je $x = 0$.

Problemi prvog stupnja

Zadatke čije se rješavanje svodi na rješavanje linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom, često zovemo jednostavno **problemima**, jer oni u sebi sadrže neki realan, praktičan problem s kojim se susrećemo u svakodnevnom životu.

Da bismo mogli koristiti naučeno znanje o rješavanju linearnih jednadžbi, moramo znati kako se riječima iskazani problem može zapisati u obliku jednadžbe.

Upute za rješavanje problemskih zadataka

- Dobro prouči zadatak. Ako je potrebno, pročitaj ga i nekoliko puta sve dok ti ne postane kristalno jasan.
- Pri analizi problema koristi zorne predodžbe: crtaj skice, dijagrame, tablice i sl. To će sigurno pridonijeti boljem razumijevanju problema.

- Za veličine koje se pojavljuju u zadatku pozorno odaberi oznake. Neka odabir oznaka asocira na veličine koje predstavljaju. Nepoznanicu standardno označi s x.
- Prevedi problem na njegov matematički zapis (jednadžbu) te ga riješi.
- Kritički se odnosi prema rješenju. Razmisli: ima li ono smisla?
- Provjeri zadovoljava li dobiveno rješenje sve uvjete zadatka.

Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama

Linearna jednadžba s dvjema nepoznanicama x i y svaka je jednadžba oblika $ax + by = c$, gdje su a, b i c realni brojevi.

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice općenito ima beskonačno mnogo rješenja. Rješenje su svaka dva broja x_0 i y_0 nakon čijeg se uvrštenja u jednadžbu dobije točna brojevna jednakost $ax_0 + by_0 = c$.

Rješenja linearne jednadžbe najčešće zapisujemo u obliku uređenih parova (x, y) realnih brojeva.

Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama ima oblik:

$$\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

Rješenje sustava čine oni parovi (x, y) koji zadovoljavaju obje jednadžbe.

Linearni sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je determinanta sustava različita od nule:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

U tom je slučaju rješenje sustava:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{de - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi koriste se još **metoda supstitucije**, **metoda suprotnih koeficijenata** i **metoda komparacije**. Smisao je svake od tih metoda da se sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama svede na jednu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom iz koje se nađe rješenje.

4. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Dana je linearna funkcija $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

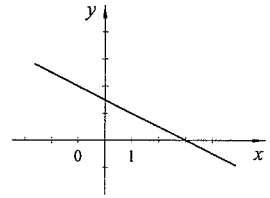
1) Odredimo nultočku ove funkcije.

2) Kolika je promjena vrijednosti ove funkcije kad x poraste od -4 na 5?

3) Za koje vrijednosti od x je ispunjena nejednakost $-1 < f(x) \leq 3$?

Rješenje zadatka popratimo grafičkom interpretacijom.

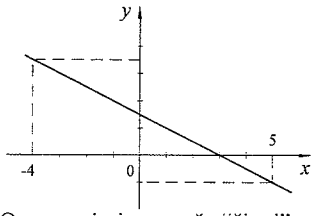
Rješenje. **1)** Prikazat ćemo danu linearnu funkciju grafički. Taj je graf pravac koji ima nagib $a = -\frac{1}{2}$, što znači da pri porastu varijable x za 1, vrijednost funkcije padne za $\frac{1}{2}$.



Pravac presijeca os ordinata u točki $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Nultočka funkcije dobije se iz jednakosti $f(x) = ax + b = 0$. U našem primjeru tako dobijemo $x = 3$. Grafički, riječ je o točki u kojoj pravac (graf funkcije) presijeca os x.

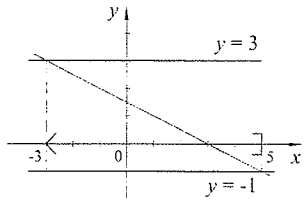
2)



Izračunajmo: $f(-4) = \frac{7}{2}$, $f(5) = -1$. Zaključujemo da se vrijednost funkcije umanjila od $\frac{7}{2}$ na -1. Dakle, kad je x porastao od -4 na 5, vrijednost funkcije se smanjila za $\frac{9}{2}$.

Ova se primjena može "čitati" na osi ordinata gdje razlika $f(5) - f(-4)$ određuje promjenu vrijednosti funkcije.

3) Opet nacrtajmo pravac $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, te na slici povucimo paralelne pravce $y = -1$ i $y = 3$. Uočimo dio grafa koji se nalazi unutar pruge što je određena s dva paralelna pravca. Projicirajmo taj dio ortogonalno na os x pa ćemo tako dobiti interval koji je rješenje zadatka.



Lijevi rub intervala dobijemo iz jednadžbe $f(x) = 3$, a desni iz $f(x) = -1$.

Danu nejednakost zadovoljava svaki $x \in \langle -3, 5]$. Uočite kako -3 ne pripada skupu rješenja nejednadžbe.

POŠTANSKA I TELEKOMUNIKACIJSKA ŠKOLA KNJIŽNICA ZAGREB

Primjer 2.

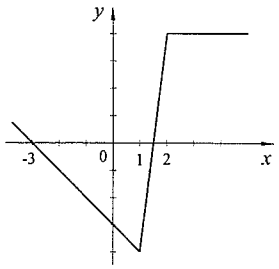
Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \le 1 \\ 8x-12, & 1 \le x \le 2 \\ 4, & x \ge 2 \end{cases}$.

1) Prikažimo grafički ovu funkciju.

2) Izračunajmo: $f(0), f(-11), f(101.11), f(-55.2), f(\sqrt{5}), f\left(\frac{5}{4}\right)$.

Rješenje.

1) Ova je funkcija padajuća nad intervalom $\langle -\infty, 1\rangle$. Za $x = 1$ prima najmanju vrijednost -4. Od $x = 1$ do $x = 2$ funkcija naraste na vrijednost 4 i tu vrijednost zadržava za sve $x \ge 2$.



2) Za svaki x treba najprije pogledati kojem od tri intervala nad kojima je funkcija f monotona pripada. Tako se $f(0), f(-11), f(-55.2)$ računaju iz: $f(x) = -x-3$, te je $f(0) = -3$, $f(-11) = 8$, $f(-55.2) = 52.2$.

Nadalje je $f\left(\frac{5}{4}\right) = -2$, te $f(\sqrt{5}) = f(101.11) = 4$.

Primjer 3.

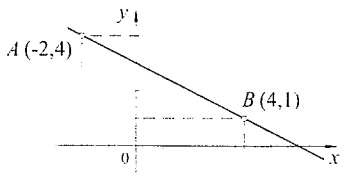
Odredimo linearnu funkciju $f(x) = ax + b$ ako je $f(-2) = 4$, $f(4) = 1$.

Rješenje. Iz danih podataka dobije se sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama a i b:

$$f(-2) = -2a + b = 4; \quad f(4) = 4a + b = 1.$$

Iz tog sustava slijedi $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$, te je time određena linearna funkcija: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

Prikažimo grafički funkciju f.



Graf je pravac određen dvjema točkama $A(-2, 4)$ i $B(4, 1)$.

Sa slike se može uočiti kako je pri prijelazu od točke A do točke B prirast apscise jednak 6, a prirast ordinate -3. To znači da je prosječan prirast funkcije jednak $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, a to je upravo nagib funkcije.

Primjer 4.

Cijena vožnje taksijem sastoji se od početne cijene koja se plaća bez obzira na duljinu vožnje i cijene koja ovisi o prijeđenim kilometrima. Ako se za vožnju od 7.5 km plati 75 kn, a za vožnju od 11 km 103 kn, kolika je cijena vožnje po 1 km?

Rješenje. Cijena vožnje za x km dana je linearnom funkcijom $f(x) = ax + b$, gdje je a cijena vožnje po jednom kilometru, a b početna cijena.

Dakle je $f(x) = 7.5a + b = 75$, odnosno $f(x) = 11a + b = 103$. Na ovaj smo način dobili sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Oduzimanjem tih jednadžbi imamo $103 - 75 = 11a - 7.5a$, te je odatle $3.5a = 28$. Dakle, cijena je jednog kilometra vožnje taksijem $a = 8$ kn.

Iz $103 = 88a + b$ slijedi $b = 15$ kn, što je startna cijena taksija.

Primjer 5.

Masa tekućeg plina u punoj boci iznosi 18 kg. Kućanstvo dnevno potroši 0.3 kg plina.

1) Za koliko se dana isprazni puna boca?

2) Ako je u boci trenutačno 15 kg plina, koliko je dana ta boca u uporabi?

Rješenje. **1)** Potrošnju plina možemo opisati linearnom funkcijom $f(x) = 18 - 0.3x$. S $f(x)$ dana je količina plina koja se nalazi u boci nakon što je plin trošen x dana.

Ako je boca ispražnjena, onda je $f(x) = 18 - 0.3x = 0$, te se odatle dobije $x = 60$ dana.

2) U boci je 15 kg plina, što znači da su potrošena 3 kg. A 3 kg potroše se za 10 dana.

Primjer 6.

Riješimo jednadžbu: $\dfrac{0.4x - \dfrac{x-0.8}{4}}{5} - \dfrac{0.3x - \dfrac{x+1.2}{5}}{4} = 0.45$.

Rješenje. Najprije pomnožimo jednadžbu s 20. Tako ćemo dobiti ekvivalentnu jednadžbu:

$$1.6x - x + 0.8 - (1.5x - x - 1.2) = 9.$$

Rješenje jednadžbe je $x = 70$.

Primjer 7.

Izrazimo c_2 iz formule $p = \dfrac{m_1c_1 + m_2c_2}{c_1 + c_2}$.

Rješenje. Nakon množenja s $c_1 + c_2$ imamo $p(c_1 + c_2) = m_1c_1 + m_2c_2$, a zatim $pc_1 + pc_2 = m_1c_1 + m_2c_2$. Razvrstamo članove jednadžbe, one koji sadrže nepoznanicu c_2 na jednu, a ostale na drugu stranu: $m_2c_2 - pc_2 = pc_1 - m_1c_1$. Dalje je: $c_2(m_2 - p) = pc_1 - m_1c_1$, i konačno $c_2 = \dfrac{pc_1 - m_1c_1}{m_2 - p}$.

Primjer 8.

Riješimo jednadžbu $m^2(x-1) - 2 = 2(mx - 3)$, gdje je m realan broj (parametar).

Rješenje. Rješenje ove jednadžbe ovisi o vrijednosti realnog broja m. Kako, razmotrit ćemo tijekom rješavanja.

Najprije ćemo *srediti* jednadžbu. Iz $m^2x - m^2 - 2 = 2mx - 6$ slijedi $m^2x - 2mx = m^2 - 4$, odnosno:

$$m(m-2)x = (m-2)(m+2).$$

I sada zaključujemo:

(1) Ako je $m = 0$, imamo $0 \cdot x = -4$. Ta jednakost nije moguća ni za koji broj x, pa kažemo da za $m = 0$ zadana jednadžba *nema rješenja.*

(2) Ako je $m = 2$, onda je $0 \cdot x = 0$, pa je rješenje jednadžbe svaki broj x. Kažemo da je jednadžba za $m = 2$ *neodređena.*

(3) Ako je $m \neq 0$ i $m \neq 2$, jednadžba ima jednoznačno rješenje, to je $x = \dfrac{m+2}{m}$.

Primjer 9.

Riješimo jednadžbu: $\dfrac{1}{|2x-3|} + 8 = \dfrac{5}{|3-2x|}$.

Rješenje. Najprije primijetimo da je $|2x - 3| = |3 - 2x|$, jer suprotni brojevi imaju jednake apsolutne vrijednosti.

Uvedemo li zamjenu $\dfrac{1}{|2x-3|} = u$, ova jednadžba prelazi u vrlo jednostavnu linearnu jednadžbu $u + 8 = 5u$, čije je jedino rješenje $u = 2$.

I sada se vratimo na originalnu nepoznanicu pa je $\dfrac{1}{|2x-3|} = 2$, odnosno: $|2x - 3| = \dfrac{1}{2}$.

Imamo dvije mogućnosti, $2x - 3 = \dfrac{1}{2}$ ili $2x - 3 = -\dfrac{1}{2}$.

U prvom slučaju dobijemo $x_1 = \dfrac{7}{4}$, a u drugom $x_2 = \dfrac{5}{4}$ i to su sva rješenja zadane jednadžbe.

Primjer 10.

U svježim smokvama je 85% vode, a u suhima je vode 12%. Koliko se suhih smokava dobije sušenjem 110 kg svježih?

Rješenje. U svježim je smokvama $110 \cdot 0.15 = 16.5$ kg suhe tvari. U masi x kg suhih smokava tih 16.5 kg čini 88%. Imamo, dakle, jednadžbu:

$$16.5 = 0.88 \cdot x,$$

odakle slijedi $x = 18.75$ kg.

Primjer 11.

Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 4x + y = 1. \end{cases}$

Rješenje. Ovaj jednostavan sustav možemo riješiti na više načina, raznim metodama.

Riješimo ga najprije *metodom supstitucije.* Iz druge jednadžbe izrazimo $y = 1 - 4x$ pa uvrstimo u prvu jednadžbu. Tako ćemo dobiti jednu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom.

$$2x - 3y = 2x - 3(1 - 4x) = 2x - 3 + 12x = 14x - 3 = 11.$$

Odatle je $x = 1$. Zatim imamo $y = 1 - 4x = -3$. Rješenje sustava je $(1, -3)$.

A sada riješimo sustav *metodom suprotnih koeficijenata.* Uz istu nepoznanicu valja u jednadžbama dobiti suprotne koeficijente. To možemo postići množenjem druge jednadžbe s 3. Tako dobijemo sustav $\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 12x + 3y = 3. \end{cases}$ Kad dvije jednadžbe zbrojimo, dobit ćemo $14x = 14$, te je $x = 1$. Lako je zatim naći $y = -3$.

Primjer 12.

Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} (a-1)x + 3y = a, \\ x + (a+1)y = 2. \end{cases}$

Za koje vrijednosti realnog parametra a vrijedi $x + y \geq 1$?

Rješenje. Prvu jednadžbu pomnožimo s $a + 1$, drugu s -3 i zatim jednadžbe zbrojimo. Tako dobijemo jednadžbu s jednom nepoznanicom $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6$. Zapisat ćemo je u obliku $(a-2)(a+2)x = (a-2)(a+3)$.

Ako je $a = 2$, sustav je *neodređen*, a ako je $a = -2$, sustav *nema rješenja.*

Za $a \neq \pm 2$ je $x = \dfrac{a+3}{a+2}$. Zatim odredimo i $y = \dfrac{1}{a+2}$.

Iz uvjeta $x + y \geq 1$ slijedi $\dfrac{a+4}{a+2} - 1 = \dfrac{2}{a+2} \geq 0$. Ova je nejednadžba ispunjena za $a > -2$ i $a \neq 2$.

Primjer 13.

Riješimo jednadžbu: $(3x-2y-1)^2+(x-2y-3)^2=0$.

Rješenje. Zbroj kvadrata jednak je nuli ako i samo ako su oba pribrojnika jednaka nuli. Odatle se dobije sustav jednadžbi $3x-2y-1=0$ i $x-2y-3=0$ s rješenjem: $x=-1$, $y=-2$.

Primjer 14.

Površina trapeza jednaka je 315 cm^2, duljina visine iznosi 15 cm, a razlika duljina osnovica trapeza je 18 cm. Kolike su duljine osnovica ovoga trapeza?

Rješenje. Iz $P=\frac{1}{2}(a+c)\cdot v$ uvrštavanjem $P=315$, $v=15$ dobijemo $a+c=42$. Ta jednadžba s jednadžbom $a-c=18$ čini linearni sustav čije je rješenje $a=30$ cm, $c=12$ cm.

Primjer 15.

Kad od dvoznamenkastog broja oduzmemo trostruku razliku njegovih znamenki, dobit ćemo 39. A kada taj broj podijelimo zbrojem njegovih znamenki, dobijemo količnik 8 i ostatak 3. Koji je to broj?

Rješenje. Iz sustava jednadžbi $10a+b-3(a-b)=39$ i $10a+b=(a+b)\cdot 8+3$ dobije se $a=5$, $b=1$, te je riječ o broju 51.

Primjer 16.

U dvjema posudama od po 50 litara nalaze se izvjesne količine tekućine. Ako bismo iz druge prelili u prvu $\frac{1}{3}$ sadržaja, prva bi posuda bila puna. A ako bismo iz prve prelili u drugu $\frac{1}{2}$ sadržaja, druga bi bila puna. Koliko je u kojoj posudi tekućine?

Rješenje. Neka je u prvoj posudi x litara tekućine, a u drugoj y litara.

Možemo zapisati sustav jednadžbi: $\begin{cases} x+\frac{1}{3}y=50, \\ \frac{1}{2}x+y=50. \end{cases}$

Rješenje ovog sustava je $x=40$, $y=30$ litara.

4. lekcija Zadaci

1. Ako je f linearna funkcija $f(x)=ax+b$ te ako je $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=-20$ i $f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)=20$, koliko je $f(x)$?

2. Dana je linearna funkcija $f(x)=-\frac{3}{15}x-\frac{11}{13}$. Poredajte po veličini, od najmanjeg prema najvećem, brojeve: $f\left(-\frac{4}{7}\right)$, $f(\sqrt{6})$, $f(0.33)$, $f(-\sqrt[3]{100})$, $f(\pi)$.

3. Za mjerenje temperature koriste se dvije različite skale, Fahrenheitova i Celsiusova, obje linearne. Po prvoj, voda se smrzava na 32°, po drugoj na 0°. Voda vrije na 312°F ili na 100°C. Odredite linearnu funkciju kojom su povezane ove dvije skale.

1) Koliko je Fahrenheitovih stupnjeva −20°C?

2) Koliko je Celzijevih stupnjeva 100°F?

3) Kad je temperatura izražena u Fahrenheitovim i Celzijevim stupnjevima jednaka?

4. Ako za linearnu funkciju vrijedi

$$f(x)+f(x+1)=2x-1,$$

za svaki realni broj x, odredite f.

5. Odredite linearnu funkciju:

$f(x)=ax+b$, ako je $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

6. Odredite linearnu funkciju $f(x)=ax+b$ ako je $f(-1)=-1$, $f(3)=5$.

1) Prikažite funkciju grafički.

2) Odredite njezinu nultočku.

3) Za koje x je $-2<f(x)\leq 4$?

7. Odredite linearnu funkciju $f(x)=ax+b$ ako je $f(-2)+f(1)=11$, $f(-2)-f(1)=-1$.

8. Na pisma do 200 g plaća se 10 kn poštarine, a na svakih dodatnih 10 g poštarina se poveća za 1.5 kn. Kolika je poštarina na pismo od 25 dag, 30 dag, 35 dag, 40 dag i 50 dag? Zapišite funkciju koja opisuje iznos cijene pisma ovisno o njegovoj masi.

9. Serviser kućanskih aparata računa dolazak u kuću 50 kn, a svaki sat rada naplaćuje 75 kn. Koliko će serviser naplatiti svoj rad koji je trajao $\frac{1}{2}$ sata, 1 sat, 1.5 sata, 2 sata, 2.5 sata? Zapišite funkciju koja opisuje cijenu servisera ovisno o vremenu koje je utrošio na popravak aparata.

10. Nakon 90 prijeđenih kilometara pokazivač stanja goriva u automobilu bio je na 33 l. Na 330 km stanje goriva bilo je 18 l.

1) Kolika je prosječna potrošnja goriva ovog automobila?

2) Ako pun spremnik sadrži 48 l, opišite funkcijom potrošnju goriva u odnosu na prijeđene kilometre i prikažite je grafički.

11. **1)** Izrazite c iz jednadžbe:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

2) Izračunajte a iz jednakosti:

$$c=\frac{ab}{a+b}.$$

Riješite jednadžbe:

12. $\frac{0.3x-1}{0.05}-\frac{1.5x-1}{0.5}=3-\frac{0.2x-0.02}{0.01}$;

13. $\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(x-1)(x+1)}{4}=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$;

14. $\frac{4}{x}-\frac{5}{x-x^2}=\frac{9}{2x-2}$;

15. $\frac{3}{10x-2x^2}=\frac{5}{2x^2-50}-\frac{4}{x^2+10x+25}$;

16. $\frac{4}{x^3-8}-\frac{1}{(x-2)^3}=\frac{3}{x^3+2x^2+4x}$;

17. $\frac{2x-1}{|4-2x|}+1=\frac{x}{|x-2|}$.

18. Na nekom ispitu znanja postavljeno je 20 zadataka. Svaki točno riješen zadatak donosi 5 bodova, a za svaki netočno riješen ili neriješen zadatak oduzimaju se 2 boda. Koliko je zadataka točno riješio ispitanik ako je osvojio 58 boda?

19. Gospodin Žurić putovao je iz Brdovca u Dobrovac. Da je vozio brzinom od 60 km/ h stigao bi sat kasnije, a da je vozio brzinom od 90 km/ h stigao bi sat ranije. Kojom je brzinom vozio gospodin Žurić?

20. Riješite jednadžbu $m^2(x-1)-2=2(mx-3)$, gdje je m realan broj (parametar).

21. Riješite jednadžbu: $9m^2(x+1)=4+6mx$.

22. Otac je 3 puta stariji od sina, a prije deset godina bio je stariji 7 puta. Koliko godina ima sin?

23. Maja ima 450 kn, Jana 300 kn. Maja potroši dvostruko više nego Jana i tada ima upola manje novca od Jane. Koliko su Maja i Jana zajedno potrošile?

24. Marko je u svojoj čaši pomiješao sirup s vodom u omjeru 2 : 9. Mirko je u svojoj čaši, jednake veličine, sirup i vodu pomiješao u omjeru 1 : 6. Ako se ovako priređena dva soka uliju u jedan vrč, u kojem će omjeru biti sirup i voda u vrču?

25. Iz jedne cisterne u kojoj je 32 hl tekućine tekućina istječe brzinom od 0.2 hl u minuti. U drugoj je cisterni 36 hl tekućine i ona istječe brzinom od 0.3 hl u minuti. Nakon koliko će vremena u obje cisterne biti jednako mnogo tekućine?

Riješite sustave jednadžbi:

26. $\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)=0.1-\frac{x+y}{5}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0.2-\frac{x-y}{5}\end{cases}$;

27. $\begin{cases}\frac{3}{x-2y}+\frac{2}{2x+y}=3\\ \frac{2}{x-2y}-\frac{1}{4x-2y}=\frac{1}{6}\end{cases}$;

28. $\begin{cases}x^2+2xy+y^2-1=0\\ (x-y+2)(x-y)=0\end{cases}$;

29. $\begin{cases}|x-2|+|y-3|=2\\ |2-x|+y=3\end{cases}$;

30. $\begin{cases}ax-3y=a\\ 3x-ay=a\end{cases}$;

31. Znamenka jedinica nekog dvoznamenkastog brojа za 3 je manja od znamenke desetica. Ako tomu broju dodamo broj zapisan istim znamenkama ali u obrnutom poretku, dobit ćemo 55. Koji je to broj?

32. Kada bi svaki učenik sjedio sam u klupi, nedostajalo bi 11 klupa. A kada bi sjedila po dvojica u klupi, pet bi klupa ostalo prazno, ostale bi bile popunjene. Koliko je u razredu klupa, a koliko učenika?

4. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Ako je $f(x)=ax+b$ linearna funkcija, te ako je $f(-1)=2$ i $f(1)=3$, tada je:

A. $b=1.8$ **B.** $b=2$ **C.** $b=2.2$ **D.** $b=2.5$

2. Nultočka funkcije $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ je broj iz intervala:

A. $\langle -3,-2\rangle$ **B.** $\langle -2,-1\rangle$ **C.** $\langle -1,0\rangle$ **D.** $\langle 0,1\rangle$

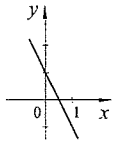
3. Ako je $f(x)=-0.1x+b$ linearna funkcija, koji je od brojeva $f(-10)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(10)$, $f(11)$ najmanji?

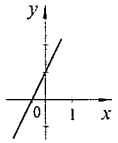
A. $f(-10)$ **B.** $f(0)$ **C.** $f(11)$ **D.** $f(10)$

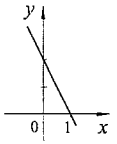
4. Funkcija f je linearna funkcija za koju vrijedi $f(x+1)-f(x-1)=-1$, za svaki realni broj x. Nagib te funkcije jednak je:

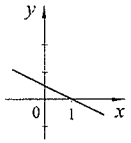
A. $-\frac{1}{2}$ **B.** 2 **C.** 1 **D.** $-\frac{1}{4}$

5. Na kojoj je od danih slika prikazan graf funkcije $f(x)=-2x+1$?

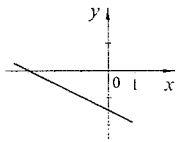
A. 

B. 

C. 

D. 

6. Kojoj od navedenih linearnih funkcija pripada graf prikazan na slici?



A. $f(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ **B.** $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

C. $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ **D.** $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

7. Ako je $f(x)=\begin{cases}2x+4, x\le -1\\ 2, -1\le x\le 1\\ -2x+4, x\ge 1\end{cases}$, onda je $f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ jednako:

A. 0 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 2

Ispit 2

1. Nultočka linearne funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}x + b$ je $x = -4$. Tada je:

   A. $b = 0$ **B.** $b = 1$ **C.** $b = -2$ **D.** $b = 3$

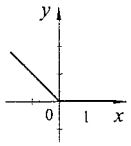
2. Dana je linearna funkcija $f(x) = 2x - 5$. Ako je prirast Δx varijable x jednak c, prirast Δf funkcije jednak je:

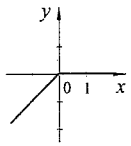
   A. $2c$ **B.** $5c$ **C.** $-2c$ **D.** $-5c$

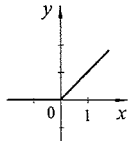
3. Nagib pravca $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$ jednak je:

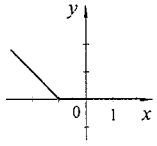
   A. $-\frac{5}{3}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{5}{3}$

4. Na kojoj je od danih slika prikazan graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2})$?

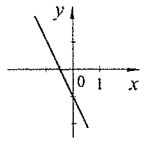
   A.
   

   B.
   

   C.
   

   D.
   

5. Kojoj od navedenih linearnih funkcija pripada graf prikazan na slici?

   A. $f(x) = -2x + 1$ **B.** $f(x) = -x + 1$

   C. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ **D.** $f(x) = -2x - 1$

6. Graf funkcije $f(x) = -ax + b$ simetričan je grafu funkcije $f(x) = ax + b$ s obzirom na:

   A. os x **B.** os y **C.** ishodište **D.** točku $T(-1, 1)$

7. Ako je $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$, onda je $f(-1) + f(0) + f(1)$ jednako:

   A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Ispit 3

1. Rješenje jednadžbe $\frac{\frac{x}{2}}{3} - \frac{x}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}$ pripada intervalu:

   A. $\langle 1, 2\rangle$ **B.** $\langle 0, 1\rangle$ **C.** $\langle -1, 0\rangle$ **D.** $\langle -2, -1\rangle$

2. Ako je $y = \frac{3x - 1}{3x + 1}$, onda je:

   A. $x = \frac{y + 1}{3(1 - y)}$ **B.** $x = \frac{y - 1}{3(y + 1)}$ **C.** $x = \frac{3(y - 1)}{3(y + 1)}$ **D.** $x = 3\frac{y + 1}{1 - y}$

3. Zbroj rješenja jednadžbe $\frac{|x|}{|x| - 1} - \frac{|x| + 1}{|x|} = \frac{1}{|x|}$ jednak je:

   A. -4 **B.** 2 **C.** 0 **D.** -2

4. Rješenje jednadžbe $\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2 - x} = \frac{1}{2x - 2}$ je broj iz intervala:

   A. $\langle -5, -3\rangle$ **B.** $\langle -3, -2\rangle$ **C.** $\langle -2, -1\rangle$ **D.** $\langle -1, 0\rangle$

5. Za koji je realni broj m jednadžba $m(mx - 1) = mx - 1$ neodređena?

   A. $m = 1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = -1$ ili $m = 1$

6. Na pismenom ispitu u nekom razredu 6 učenika riješilo je sve zadatke, 62.5% učenika riješilo je samo neke, a $\frac{1}{8}$ nije riješila niti jedan zadatak. Broj učenika u tom razredu jednak je:

   A. 24 **B.** 25 **C.** 30 **D.** 32

7. Uređeni par $(-3, 4)$ rješenje je sustava jednadžbi $\begin{cases} ax + by = 11, \\ ax - by = -5. \end{cases}$ Zbroj koeficijenata a i b jednak je

   A. 2 **B.** 1 **C.** -1 **D.** -2

8. Ako je (x, y) rješenje jednadžbe $|2x + 3y + 1| + |x - y + 1| = 0$, onda je:

   A. $|x - y| = 1$ **B.** $|x - y| = 2$ **C.** $|x - y| = 3$ **D.** $|x - y| = 4$

9. Sustav jednadžbi $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$ nema rješenja za:

   A. $m = 1$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = -2$

10. U prvoj je posudi dva puta više mlijeka nego u drugoj. Ako iz prve prelijemo u drugu 1.8 litara, u obje će posude biti ista količina mlijeka. Kolika?

    A. 5.4 lit **B.** 4.4 lit **C.** 6.4 lit **D.** 6 lit

Ispit 4

1. Rješenje jednadžbe $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}$ je broj:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

2. Rješenje jednadžbe: $\dfrac{3}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^2-6x+9}=\dfrac{4}{2x^2+6x}$ je broj:

A. Jednadžba nema rješenja **B.** $x=-3$
C. $x=3$ **D.** $x=0$

3. Ako je $y=\dfrac{1+ax}{a-x}$, onda je:

A. $x=\dfrac{ay+1}{y-a}$ **B.** $x=\dfrac{ay}{1-y}$ **C.** $x=\dfrac{ay+1}{y+a}$ **D.** $x=\dfrac{ay-1}{y+a}$

4. Jednadžba $m(mx-1)=mx-1$ nema rješenja za:

A. $m=0$ ili $m=1$ **B.** $m=1$ **C.** $m=0$ **D.** $m=-1$

5. U 10 litara tekućine T_1 ulije se 4 litre tekućine T_2 i 6 litara tekućine T_3. Ako se iz tako dobivene smjese odliju 3 litre, količina tekućine T_3 koja ostane u posudi iznosit će:

A. 5.5 lit. **B.** 3.6 lit. **C.** 4.5 lit. **D.** 5.1 lit.

6. Uređeni par (x_1,y_1) rješenje je jednadžbe $(2x+y-2)^2+(x-2y-1)^2=0$. Tada je:

A. $x_1y_1=3$ **B.** $x_1y_1=0$ **C.** $x_1y_1=6$ **D.** $x_1y_1=1$

7. U nekom razredu $\dfrac{3}{5}$ svih učenika uči engleski, a $\dfrac{2}{3}$ njemački jezik. Oba jezika uči 8 učenika. Koliko je u tom razredu učenika ako svaki učenik uči barem jedan od dva strana jezika, engleski ili njemački?

A. 20 **B.** 25 **C.** 30 **D.** 32

8. Broj svih rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases}|x|+2|y|=5\\2|x|-|y|=5\end{cases}$ jednak je:

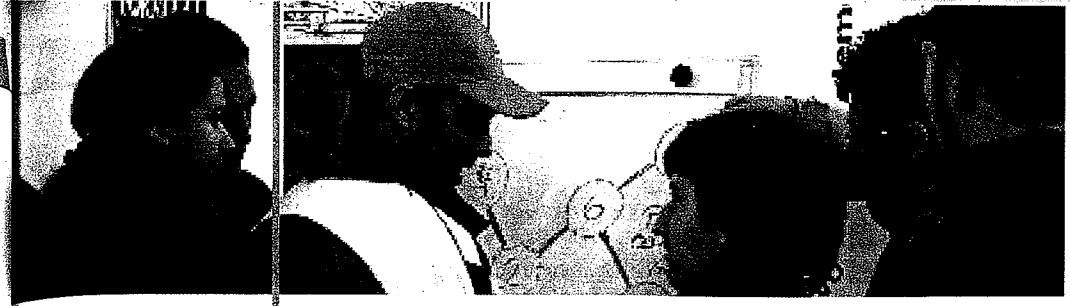
A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 8

9. Sustav jednadžbi $\begin{cases}x+(m-2)y=1\\mx-y=1\end{cases}$ neodređen je za:

A. $m=2$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=1$

10. Zbroj dvaju brojeva jednak je 101. Ako veći broj podijelimo manjim, dobit ćemo količnik 6 i ostatak 10. Razlika tih brojeva jednaka je:

A. 15 **B.** 33 **C.** 45 **D.** 75



5. lekcija

Uređaj na skupu realnih brojeva

5. lekcija Ponovimo

Uređaj

Za svaka dva realna broja vrijedi ili $a < b$ ili $a > b$ ili $a = b$.

Broj a manji je od broja b ako i samo ako je $a - b < 0$.

Ovoj definiciji ekvivalentna je sljedeća definicija:

Broj a manji je od broja b onda i samo onda ako postoji pozitivan broj k za koji je $a + k = b$.

Uspoređivanje racionalnih brojeva. Ako su racionalni brojevi napisani u standardnom obliku (s pozitivnim nazivnicima), tada vrijedi:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc.$$

Svojstva relacije uređaja

- Tranzitivnost
  Ako su a, b i c realni brojevi, onda iz $a < b$ i $b < c$ slijedi $a < c$.
- Usklađenost sa zbrajanjem
  Neka su a i b realni brojevi. Tada je $a < b$ onda i samo onda ako je $a + c < b + c$, za svaki realni broj c.
  Dodamo li na obje strane nejednakosti isti broj, znak nejednakosti neće se promijeniti.
- Usklađenost s množenjem
  Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a < b$. Ako je:
  1) $c > 0$, onda je $ac < bc$;
  2) $c < 0$, onda je $ac > bc$.
  Pomnožimo li nejednakost dvaju realnih brojeva pozitivnim brojem, znak nejednakosti neće se promijeniti; pomnožimo li je negativnim, znak nejednakosti će se promijeniti.

Linearne nejednadžbe

Linearna nejednadžba je nejednadžba oblika:

$$a \cdot x + b < 0,$$

gdje je $a, b \in \mathbf{R}$ i $a \neq 0$.

Pri svođenju nejednadžbi na taj oblik treba pomnjivo primijeniti svojstva relacije uređaja.

Riješiti linearnu nejednadžbu $ax + b < 0$ po nepoznanici x znači odrediti sve realne brojeve x za koje je $ax + b < 0$ točna nejednakost brojeva. Stoga govorimo o skupu rješenja nejednadžbe i rješenje zapisujemo u obliku intervala.

Napomena. Pri množenju (ili dijeljenju) nejednadžbe s negativnim brojem, treba se promijeniti i znak nejednakosti.

Intervali

Skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi $a < x < b$, gdje su a i b također realni brojevi, zovemo **intervalom** i zapisujemo $\langle a, b \rangle$.

Ako je $a \leq x < b$, interval zapisujemo $[a, b\rangle$ i zovemo ga **poluzatvorenim**.

Ako je $a < x \leq b$, interval zapisujemo $\langle a, b]$ i zovemo ga **poluotvorenim**.

Ako je $a \leq x \leq b$, interval zapisujemo $[a, b]$ i zovemo ga **zatvorenim**.

Skup svih realnih brojeva x, $x > a$ zapisujemo kao $\langle a, +\infty \rangle$.

Skup svih realnih brojeva x, $x < a$ zapisujemo kao $\langle -\infty, a \rangle$.

Sustav dviju linearnih nejednadžbi

Riješiti sustav dviju nejednadžbi znači naći sva zajednička rješenja obiju nejednadžbe, odnosno sve realne brojeve koji su rješenja i jedne i druge nejednadžbe (presjek intervala).

Vrijedi:

Umnožak dvaju brojeva pozitivan je onda i samo onda ako su ti brojevi istih predznaka:

$$a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \text{ i } b > 0) \text{ ili } (a < 0 \text{ i } b < 0).$$

Umnožak dvaju brojeva negativan je onda i samo onda ako su ti brojevi različitih predznaka:

$$a \cdot b < 0 \iff (a > 0 \text{ i } b < 0) \text{ ili } (a < 0 \text{ i } b > 0).$$

Kvocijent dvaju brojeva pozitivan je onda i samo onda ako su ti brojevi istih predznaka:

$$\frac{a}{b} > 0 \iff (a > 0 \text{ i } b > 0) \text{ ili } (a < 0 \text{ i } b < 0).$$

Kvocijent dvaju brojeva negativan je onda i samo onda ako su ti brojevi različitih predznaka:

$$\frac{a}{b} < 0 \iff (a > 0 \text{ i } b < 0) \text{ ili } (a < 0 \text{ i } b > 0).$$

Napomena. U nejednakosti sa kvocijentom za nazivnik uvijek vrijedi stroga nejednakost, bez obzira na pripadni znak nejednakosti kvocijenta.

Apsolutna vrijednost realnog broja

Za dani realni broj x njegova je **apsolutna vrijednost (modul)** broj $|x|$ koji određujemo na sljedeći način:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Svojstva apsolutne vrijednosti

Za sve realne brojeve a i b vrijede sljedeće tvrdnje.

- Apsolutne vrijednosti suprotnih brojeva jednake su:
$$|a| = |-a|.$$
- Apsolutna vrijednost zbroja dvaju brojeva manja je ili jednaka zbroju apsolutnih vrijednosti tih brojeva (**nejednakost trokuta**):
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$
- Apsolutna vrijednost umnoška dvaju brojeva jednaka je umnošku apsolutnih vrijednosti tih brojeva:
$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$
- Apsolutna vrijednost količnika dvaju brojeva jednaka je količniku apsolutnih vrijednosti tih brojeva, za broj $b \neq 0$ vrijedi:
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Rješavanje jednadžbi s apsolutnim vrijednostima

Ako je $|x| = a$, gdje je a pozitivan broj, onda je $x = a$ ili $x = -a$.

Rješavanje nejednadžbi s apsolutnim vrijednostima

Postoje dva osnovna tipa nejednadžbi s apsolutnim vrijednostima. Ako je a pozitivan broj, tada vrijedi:

1) $|x| < a$, onda i samo onda ako je $-a < x < a$,
2) $|x| > a$, onda i samo onda ako je $x < -a$ ili $x > a$.

5. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu dvaju pozitivnih realnih brojeva a i b vrijedi nejednakost $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$. Dokažimo!

Rješenje. Nejednakost izravno proistječe iz očigledne nejednakosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Njezinim kvadriranjem dobivamo $a - 2\sqrt{a \cdot b} + b \geq 0$, a odatle proistječe $a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b}$.

Primijetimo kako znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

Primjer 2.

Dokažimo, ako su a i b realni brojevi te ako je $a < b$, onda je:

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Rješenje. U zadatku je iskazana činjenica da je aritmetička sredina dvaju realnih brojeva uvijek "između njih", veća je od manjeg, a manja od većeg od dvaju brojeva.

Dokažimo to.

Dodamo li s obje strane nejednakosti $a < b$ broj a, tada je $2a < a + b$, a odatle: $a < \frac{a+b}{2}$.

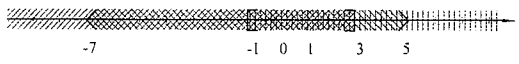
Ako pak s obje strane nejednakosti $a < b$ dodamo b, dobit ćemo $a + b < 2b$.

Dakle je $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Primjer 3.

Dani su intervali $A = \langle -\infty, 3]$, $B = \langle -7, 5\rangle$, $C = [-1, +\infty\rangle$.
Odredimo $A \cup B$, $B \cap C$ i $A \cap (B \cup C)$.

Rješenje. Prikažimo intervale A, B i C na brojevnom pravcu.



Iscrtajmo dio pravca na kojem su smješteni brojevi iz prvog intervala kosim crticama, a dio pravca na kojem su brojevi iz drugog intervala crticama drukčijeg nagiba.

POŠTANSKA I TELEKOMUNIKACIJSKA ŠKOLA KNJIŽNICA

Unija intervala A i B je skup $A \cup B$ koji sadrži sve elemente skupova A i B. Očigledno je $A \cup B = \langle -\infty, 5\rangle$.

Presjek intervala B i C je interval koji sadrži zajedničke elemente tih dvaju intervala.

S crteža vidimo da je $B \cap C = [-1, 5\rangle$.

I konačno je $A \cap (B \cup C) = \langle -\infty, 3] \cap \langle -7, +\infty\rangle = \langle -7, 3]$.

Primjer 4.

Riješimo sustav nejednadžbi: $\begin{cases} 1 - \dfrac{x - 0.5}{5} < \dfrac{3x}{2} - 0.1, \\ \dfrac{4x - 1}{3} - 0.25 > \dfrac{x}{4}. \end{cases}$

Rješenje. Ovdje je riječ o sustavu dviju linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom. Treba riješiti svaku nejednadžbu posebno, pa onda naći zajednička rješenja. To će biti presjek dvaju skupova rješenja tih nejednadžbi.

Prvu nejednadžbu pomnožimo s 10 te je $10 - 2x + 1 < 15x - 1$. Tako dolazimo do skupa rješenja prve nejednadžbe, to je interval $\left\langle \frac{12}{17}, +\infty \right\rangle$.

Na jednak način dobije se rješenje druge nejednadžbe, interval $\left\langle \frac{7}{13}, +\infty \right\rangle$.

Kako je $\frac{12}{17} > \frac{7}{13}$, onda je konačno $x \in \left\langle \frac{12}{17}, +\infty \right\rangle$.

Primjer 5.

Riješimo nejednadžbu: $\dfrac{x+1}{2x-5} \geq 1$.

Rješenje. Najprije prebacimo broj 1 s desne na lijevu stranu i provedimo oduzimanje:

$$\frac{x+1}{2x-5} - 1 = \frac{x+1-2x+5}{2x-5} = \frac{-x+6}{2x-5}.$$

Zadana je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi $\dfrac{-x+6}{2x-5} \geq 0$.

Količnik dvaju brojeva pozitivan je broj ako su brojnik i nazivnik istoga predznaka, tj. ako je:

$$1)\ \begin{cases} -x+6 \geq 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \qquad \text{ili} \qquad 2)\ \begin{cases} -x+6 \leq 0 \\ 2x-5 < 0 \end{cases}.$$

Rješenje sustava 1) je $x \in \left\langle \frac{5}{2}, 6 \right]$, a sustav 2) nema rješenja. Tako je rješenje zadane nejednadžbe $x \in \left\langle \frac{5}{2}, 6 \right]$.

Primjer 6.

Riješimo nejednadžbu $1 - \dfrac{2}{x-1} < \dfrac{2x}{x+1}$.

Rješenje. Najprije nejednadžbu zapišimo u obliku $1 - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2x}{x+1} < 0$.

Provedimo oduzimanje na lijevoj strani nejednadžbe:

$$1 - \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2 - 1 - 2x - 2 - 2x^2 + 2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Tako smo dobili nejednadžbu koja je ekvivalentna zadanoj: $\dfrac{-x^2-3}{x^2-1} < 0$.

No valja primijetiti kako je broj $-x^2 - 3$ uvijek negativan, za svaki broj x. On čak ne može biti veći od -3. Da bi razlomak bio negativan nazivnik mora biti pozitivan broj, tj. mora biti $x^2 - 1 > 0$. Slijedi $x^2 > 1$, odnosno $|x| > 1$.

Konačno, rješenje nejednadžbe je $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

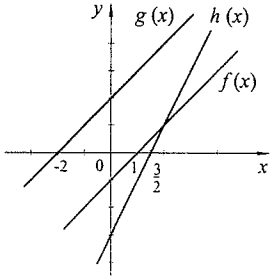
Primjer 7.

Riješimo nejednadžbe:

1) $(x-1)(x+2)(2x-3) < 0$; **2)** $\dfrac{2x+3}{(x+1)(7-3x)} \geq 0$.

Rješenje. Obje ove nejednadžbe najjednostavnije je riješiti koristeći se svojstvima linearne funkcije.

1)



Označimo: $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = 2x - 3$.

Skicirajmo zatim na jednoj slici pravce koji su grafovi tih triju funkcija. Pritom je bitno točno rasporediti nultočke (nije bitno ustrajati na njihovoj točnoj udaljenosti), i paziti na nagib pravaca.

Zatim prolazimo po intervalima koji su određeni nultočkama i zaključujemo:

Za $x < -2$ sve tri funkcije primaju negativne vrijednosti, te je i umnožak tih vrijednosti negativan broj.

Za $-2 < x < 1$, funkcije f i h primaju negativne, a funkcija g pozitivne vrijednosti. Umnožak dvaju negativnih i jednog pozitivnog broja pozitivan je broj.

Za $1 < x < \frac{3}{2}$ funkcije f i g primaju pozitivne vrijednosti, vrijednosti funkcije h na tom intervalu su negativne pa je $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) < 0$.

I konačno, za $x > \frac{3}{2}$ sva tri broja, $f(x), g(x)$ i $h(x)$ pozitivna su pa je pozitivan i njihov umnožak.

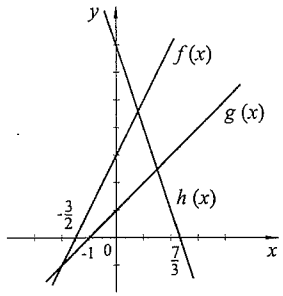
Dakle, rješenje je zadane nejednadžbe svaki realni broj $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \left\langle 1, \frac{3}{2}\right\rangle$.

2) I druga se nejednadžba rješava analogno. Naime, predznak razlomka $\frac{2x+3}{(x+1)(7-3x)}$ jednak je predznaku umnoška:

$$(2x+3)(x+1)(7-3x).$$

Tako dolazimo do rješenja:

$$x \in \left\langle -\infty - \frac{3}{2}\right] \cup \left\langle -1, \frac{7}{3}\right\rangle.$$



Primjer 8.

Koliko je $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-\sqrt{4}|+\ldots+|\sqrt{99}-\sqrt{100}|$?

Rješenje. U svakoj od zagrada negativan je broj pa je njegova apsolutna vrijednost njemu suprotan broj. Tako je dani izraz jednak:

$$\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-1=9.$$

Primjer 9.

Riješimo jednadžbu $||x-1|-2|=1$.

Rješenje. Prema definiciji apsolutne vrijednosti slijedi $|x-1|=1$ ili $|x-1|=3$. (Obrazložite!) U prvom je slučaju $x=0$ ili $x=2$, a u drugom $x=-2$ ili $x=4$.

Dana jednadžba, dakle, ima četiri rješenja: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=4$.

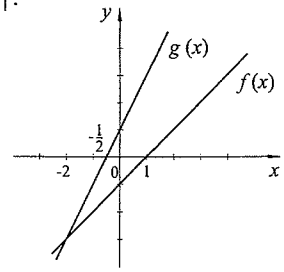
Primjer 10.

Riješimo nejednadžbu $|3x-1| \geq \frac{1}{2}$.

Rješenje. Zadana je nejednadžba ekvivalentna uniji nejednadžbi: $3x-1 \leq -\frac{1}{2}$ ili $3x-1 \geq \frac{1}{3}$. Rješenje prve od ove dvije nejednadžbe je $x \leq \frac{1}{6}$, a rješenje druge je $x \geq \frac{1}{2}$. Konačno rješenje je unija ovih dvaju rješenja: $x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$.

Primjer 11.

Riješimo nejednadžbu: $|x-1| < |2x+1|$.



Rješenje. Skicirajmo grafove funkcija $f(x)=x-1$ i $g(x)=2x+1$.

Vidimo da su nultočkama ovih dviju funkcija određena tri intervala iznad kojih se te funkcije razlikuju po predznaku.

Razmotrit ćemo zadanu nejednadžbu za brojeve iz tih intervala.

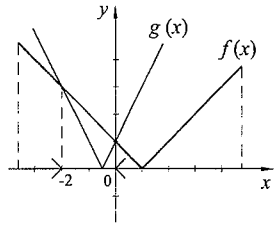
(1) Ako je $x \leq -\frac{1}{2}$, vrijednosti obiju funkcija, i f, i g, negativni su brojevi pa imamo nejednadžbu $-x+1 < -2x-1$ čije je rješenje $x < -2$.

(2) Za $-\frac{1}{2} < x < 1$, funkcija g prima pozitivne, a funkcija f negativne vrijednosti pa imamo nejednadžbu $1-x < 2x+1$, odakle slijedi $x > 0$ pa uz početni uvjet imamo $0 < x < 1$.

(3) I konačno, za $x \geq 1$ obje funkcije primaju pozitivne vrijednosti te imamo $x-1 < 2x+1$ i odatle $x > -2$. Uz uvjet s početka rješenje je u ovom slučaju $x \geq 1$.

I na kraju načinimo uniju rješenja iz sva tri razmotrena slučaja. Tako dolazimo do rješenja zadane nejednadžbe: $x < -2$ ili $x > 0$.

No, ovakve je zadatke najjednostavnije rješavati na sljedeći način:



Nacrtamo grafove funkcija $f(x)=|x-1|$ i $g(x)=|2x+1|$ u istom koordinatnom sustavu.

Promatramo sliku i na njoj vidimo gdje je f "ispod" g. Podebljamo taj dio grafa funkcije f i projiciramo ga ortogonalno na os apscisu. Ortogonalna projekcija jest skup koji je rješenje zadane nejednadžbe.

5. lekcija Zadaci

1. Dani su intervali $A = \langle -\infty, 0]$, $B = [-10, +\infty\rangle$, $C = \langle -5, 5\rangle$. Odredite skupove:

1) $A \cap (B \cup C)$; **2)** $(A \cap B) \cup C$.

2. Dani su skupovi $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$. Odredite skupove:

1) $(A \cap B) \cap C$; **2)** $(A \cup C) \cap B$.

Riješite nejednadžbe:

3. $2\left(1 - \frac{x+1}{2}\right) - 3(x-1) > \frac{x}{2}$;

4. $\left(\frac{3x}{2} - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 < 1\frac{1}{4}$;

5. $(2x-1)^3 - (2x+1)^3 \geq 1 - 6(2x+1)^2$.

6. **1)** $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$; **2)** $\frac{2x-3}{4-3x} < 0$.

7. **1)** $\frac{2x-1}{x-1} > 1$; **2)** $\frac{x-3}{1-3x} \geq \frac{1}{2}$.

8. Odredite sve vrijednosti realnog parametra a za koje je rješenje jednadžbe $1 - \frac{a}{2} = \frac{1-ax}{x+2}$ manje od 1.

Riješite nejednadžbe:

9. $\frac{1}{x-2} \leq \frac{2}{2x+1}$;

10. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} > 1$;

11. $\frac{x+1}{x^3 + x^2 - x - 1} < 0$.

12. Riješite sustav nejednadžbi:

$$-1 < \frac{x}{x+1} \leq 2.$$

13. Izračunajte vrijednost brojevnog izraza $||x-1|-1|$ za $x = \sqrt{2} - 1$.

14. Izračunajte vrijednost brojevnog izraza $|||x-2|-2|$ za $x = 1 - \sqrt{3}$.

15. Riješite jednadžbe:

1) $|2x-3| = 0.7$; **2)** $|3 - |2-x|| = 1$.

16. Riješite jednadžbe:

1) $\frac{3}{|x-2|} - 1 = \frac{2}{|4-2x|}$;

2) $\frac{|x|}{|x|+1} - \frac{|x|-1}{|x|} = \frac{1}{|x|+1}$.

17. Riješite nejednadžbe:

1) $|3x+1| \leq 2$; **2)** $|2x-5| \geq 1$.

18. Riješite nejednadžbe:

1) $\left|\frac{1}{x-1}\right| \leq 2$; **2)** $\left|\frac{x+1}{2x+3}\right| \geq 1$.

19. Riješite nejednadžbu:

$$\frac{3}{1 + |x-1|} < 2.$$

20. Riješite sustav nejednadžbi:

$$\frac{1}{2} < |1-x| < 1.$$

21. Razlomak $\frac{x|x-4|-4}{1-|1-x|}$ zapiši bez oznaka apsolutne vrijednosti uz uvjet $1 < x < 4$.

22. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba $||x|-1| = a$ ima točno četiri rješenja?

5. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Dani su intervali $A = [-3, 5\rangle$, $B = \langle 0, 11]$, $C = \langle -1, +\infty\rangle$. Skup $(A \cup B) \cap C$ je interval:

A. $\langle 0, 5\rangle$ **B.** $[-3, +\infty\rangle$ **C.** $\langle -1, 11]$ **D.** $\langle 0, +\infty]$

2. Rješenje nejednadžbe $x^{-1} + x < \frac{1}{2}$ jest interval:

A. $\langle 0, 2\rangle$ **B.** $\langle -\infty, 0\rangle$ **C.** $\langle -1, 1\rangle$ **D.** $\langle 0, +\infty]$

3. Najmanji cijeli broj za koji je ispunjena nejednakost $2\sqrt{2}(3-2x) > 3(3-2x)$ jest broj:

A. $x = 0$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 3$

4. Realna funkcija $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ definirana je za svaki realni broj x:

A. $x \geq 2$ **B.** $-2 \leq x \leq 2$ **C.** $x \geq -2$ **D.** $x \leq 2$

5. Rješenje nejednadžbe $(x-1)^2 > x^2 - 1$ je realni broj x:

A. $x < 1$ **B.** $-1 \leq x \leq 1$ **C.** $x \leq -1$ **D.** $x < 0$

6. Rješenje jednadžbe $3x - a = ax - 1$ je negativan broj za sve realne brojeve a:

A. $a < 1$ ili $a > 3$ **B.** $a < 3$ **C.** $1 < a < 3$ **D.** $a > 1$

7. Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{x+1}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2-1} > 1$ jest interval:

A. $\langle -1, 1\rangle$ **B.** $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$
C. $\langle 0, 1\rangle$ **D.** $\langle -1, 0\rangle$

8. Sustav nejednakosti $-1 < x < 5$ ekvivalentan je nejednadžbi $|x+a| < 3$ ako je:

A. $a = -1$ **B.** $a = -2$ **C.** $a = 1$ **D.** $a = 2$

9. Zbroj svih rješenja jednadžbe $||2x-1|-2| = 2$ jednak je:

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $-\frac{1}{3}$

10. Ako je $0 < x < 1$, razlomak $\frac{|x-1| + |2x+1|}{x^3 - 4x}$ ekvivalentan je razlomku:

A. $\frac{3}{x^2-4}$ **B.** $\frac{1}{x}$ **C.** $\frac{2}{x+2}$ **D.** $\frac{1}{x(x-2)}$

Ispit 2

1. Dani su intervali $A = \langle -\infty, 5]$, $B = [0, 10\rangle$, $C = \langle -3, +\infty\rangle$. Skup $(A \cap B) \cup C$ je interval:
   A. $\langle -3, +\infty\rangle$ **B.** $\langle -\infty, 10]$ **C.** $[-3, 5]$ **D.** $\langle 10, +\infty\rangle$

2. Koliko ima cijelih brojeva n za koje vrijedi nejednakost $0.01 < 2^{1-n} < 10$?
   A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

3. Nejednadžba $2^n \cdot x < 8x - 1$ nema rješenja ako je:
   A. $n = 0$ **B.** $n = 1$ **C.** $n = 2$ **D.** $n = 3$

4. Rješenje nejednadžbe $\frac{0.1x-2}{10} - \frac{0.2x-3}{20} - \frac{0.3x-4}{30} \geq 0$ je realni broj x:
   A. $x \geq \frac{1}{3}$ **B.** $x \leq \frac{17}{3}$ **C.** $x \leq 8\frac{1}{3}$ **D.** $x \geq \frac{1}{10}$

5. Realna funkcija $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$ definirana je za svaki realni broj x:
   A. $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$ **B.** $x \in \left\langle -1, \frac{1}{2}\right]$
   C. $x \in \langle -\infty, -1\rangle$ **D.** $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$

6. Rješenje nejednadžbe $\frac{2x+1}{1-x+x^2-x^3} \geq 0$ svaki je realni broj x:
   A. $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ **B.** $x \in \mathbf{R}$ **C.** $x \in [1, +\infty\rangle$ **D.** $x \in \langle -\infty, 1\rangle$

7. Ako je uređeni par (x, y) rješenje sustava jednadžbi $2x+y-1 = 0$ i $x-y+a = 0$, tada je $|x - y| < 3$ za svaki a iz intervala:
   A. $a \in \langle -\infty, 1\rangle$ **B.** $a \in \langle 1, +\infty\rangle$ **C.** $a \in \langle -1, 1\rangle$ **D.** $a \in \langle -3, 3\rangle$

8. Dana je funkcija $f(x) = |1 - x| - |2 - x| - |3 - x|$. Ako je $-1 < x < 1$, onda je:
   A. $f(x) = 6 - 3x$ **B.** $f(x) = x - 4$ **C.** $f(x) = 3x + 6$ **D.** $f(x) = x$

9. U 10 litara 60%-tne kiseline treba uliti neku količinu 90%-tne kiseline kako bi se dobila kiselina koncentracije barem 75%. Ako je x količina kiseline koju valja uliti, tada je:
   A. $x \geqslant 10$ **B.** $x \geqslant 15$ **C.** $x \geqslant 20$ **D.** $x \leqslant 10$

10. Rješenje nejednadžbe $|1 - x| \geq \frac{2}{3}$ je skup svih realnih brojeva x:
    A. $x \leq \frac{1}{3}$ **B.** $x \geq \frac{5}{3}$ **C.** $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$ **D.** $x \leq \frac{1}{3}$ ili $x \geq \frac{5}{3}$

Ispit 3

1. Riješite nejednadžbu: $\frac{\frac{x}{2}-1}{3} - \frac{\frac{x}{3}-1}{2} \geq \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}$.
   A. $[-3, -1]$ **B.** $[-1, 1]$ **C.** $[1, 2]$ **D.** nema rješenja

2. Nejednakost $(1 - \sqrt{3})x > \sqrt{3} + 1$ ispunjena je za svaki x:
   A. $x < -2 - \sqrt{3}$ **B.** $x > \sqrt{3}$ **C.** $x < 2$ **D.** $x > 2(1 - \sqrt{3})$

3. Rješenje nejednadžbe $(x-1)(x-2)(x-3) \geq (x-2)^3$ jest:
   A. $x \leq 2$ **B.** $x \geq 3$
   C. $1 \leq x \leq 3$ **D.** nejednadžba nema rješenja

4. Među svim pravokutnicima opsega 4 cm najveća površina nekog od njih jednaka je:
   A. 1 cm^2 **B.** 2 cm^2 **C.** 3 cm^2 **D.** 4 cm^2

5. Razlomak $\frac{x-1}{x+1}$ je broj iz intervala $\langle -1, 1\rangle$ ako je:
   A. $x < 0$ **B.** $0 < x < 1$ **C.** $x > 0$ **D.** $-1 < x < 1$

6. Nejednadžba $x^8 - 1 < 0$ ekvivalentna je nejednadžbi:
   A. $|x| > 1$ **B.** $|x| < 1$ **C.** $|x| > -1$ **D.** $|x - 1| < 1$

7. U 40 kg neke slitine bakra je između 20% i 25%. U 60 kg druge slitine količina bakra veća je od 10%, a manja od 20%. Kad se od ove dvije slitine načini treća, u njoj će količina bakra biti između:
   A. 12% i 18% **B.** 14% i 22% **C.** 16% i 24% **D.** 18% i 30%

8. Rješenje nejednadžbe $\sqrt{x-1} \geq \sqrt{2-x}$ jest interval:
   A. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right]$ **B.** $[1, 2]$ **C.** $\left[-\infty, \frac{3}{2}\right]$ **D.** $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

9. Skup $[-2, 0\rangle \cup \langle 2, 4]$ rješenje je sustava nejednadžbi:
   A. $2 \leq |x - 1| \leq 4$ **B.** $1 \leq |x - 1| < 2$
   C. $1 < |x - 1| \leq 3$ **D.** $1 \leq |x - 1| \leq 4$

10. Ako je $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, onda je $f(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ jednako:
    A. $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ **B.** $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ **D.** $2(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

Ispit 4

1. Nejednakost $(a-b)^2 \leq a^2+b^2$ ispunjena je ako i samo ako je:
   A. $a \leq b$ **B.** $a+b \geq 0$ **C.** $a \cdot b \geq 0$ **D.** $a \geq b$

2. Rješenje nejednadžbe $\frac{\frac{x}{2}}{5} - \frac{x}{\frac{2}{5}} < \frac{2}{5}$ jest svaki realni broj x za koji vrijedi:
   A. $x > -\frac{4}{3}$ **B.** $x > -\frac{1}{6}$ **C.** $x < -\frac{1}{4}$ **D.** $x < \frac{1}{6}$

3. Veza između stupnjeva Celzija i stupnjeva Fahrenheita linearna je funkcija $F = \frac{9}{5}C + 32$. Ako je temperatura između $20°$ C i $22°$ C, onda je:
   A. $-5.6 < F < 4$ **B.** $11 < F < 22.5$ **C.** $35 < F < 41.4$ **D.** $68 < F < 71.6$

4. Rješenje nejednadžbe $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0$ jest skup:
   A. $\langle 1,2\rangle \cup \langle 3,4\rangle$ **B.** $\langle -\infty,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle \cup \langle 4,+\infty\rangle$
   C. $\langle 2,3\rangle$ **D.** $\langle -\infty,1\rangle \cup \langle 4,+\infty\rangle$

5. Razlika duljine d i širine s pravokutnika jednaka je 20 cm. Opseg pravokutnika treba biti između 80 cm i 100 cm. Ako je širina broj djeljiv sa 3, onda ona iznosi:
   A. 18 cm **B.** 21 cm **C.** 15 cm **D.** 12 cm

6. Broj cjelobrojnih rješenja sustava nejednadžbi $0.2x - \frac{1+x}{3} < 0.5$ i $0.3 - \frac{2-x}{2} < 2.5$ jednak je:
   A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

7. Točke $A(-5)$, $B(7)$ i $C(x)$ pripadaju brojevnom pravcu. Ako je $|AC| = 2|BC|$, onda je:
   A. $x = 2$ **B.** $x = 3$ ili $x = 19$ **C.** $x = -2$ ili $x = 2$ **D.** $x = -17$

8. Ako je cijena rabljenog automobila 48 000 kn, a želimo je spustiti ispod 45 000 kn, tada sniženje mora biti veće od:
   A. 5% **B.** 5.5% **C.** 6.25% **D.** 7.5%

9. Rješenje nejednadžbe $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ je:
   A. $x < -\frac{1}{2}$ **B.** $x > \frac{2}{3}$ **C.** $x > \frac{1}{4}$ **D.** $x > \frac{3}{4}$

10. Ako je rješenje nejednadžbe $|x-a| < 2$ interval $\langle -1,3\rangle$, onda je:
    A. $a = 1$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = 3$ **D.** $a = 4$

6. lekcija

Skup kompleksnih brojeva

6. lekcija Ponovimo

Kompleksni broj

Imaginarna jedinica je broj za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Umnožak $y \cdot i$ realnog broja y i imaginarne jedinice i zovemo **imaginarnim brojem**.

Kompleksni broj je broj oblika:

$$z = x + yi,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se **realni dio** kompleksnog broja z, a broj y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis $z = x + yi$ zovemo **algebarskim** ili **standardnim prikazom** kompleksnog broja.

Skup kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbf{C}$.

Jednakost kompleksnih brojeva. Dva kompleksna broja z i w jednaka su ako je:

$$z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

Zbroj, razlika i umnožak kompleksnih brojeva jesu kompleksni brojevi. Ako su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ bilo koja dva kompleksna broja, tada zbrajanje, oduzimanje i moženje definiramo na sljedeći način:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i,$$
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Operacije zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva komutativne su i asocijativne, a vrijedi i zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Potencije imaginarne jedinice. Neka je k prirodni broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Dakle, ako je eksponent potencije imaginarne jedinice djeljiv s 4, vrijednost potencije je 1; ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4 jednak 1, vrijednost potencije je i; ako je ostatak 2, vrijednost je -1; a ako je ostatak 3, vrijednost potencije je $-i$.

Konjugirano kompleksni brojevi. Brojevi $z = x + yi$ i $\bar{z} = x - yi$ su par konjugirano kompleksnih brojeva.

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je i nenegativan broj:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva. Dva se kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dijele na sljedeći način:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Kompleksni brojevi dijele se tako da se djeljenik i djelitelj pomnože brojem koji je konjugiran djelitelju.

Kompleksna ravnina

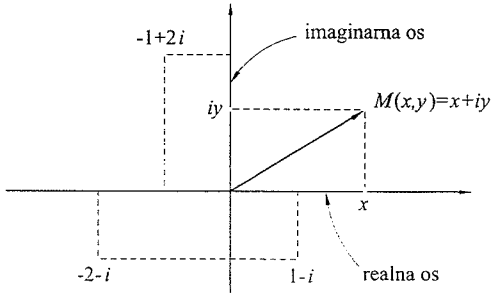
Modul kompleksnog broja. Modul kompleksnog broja $z = x + yi$ je realan broj $|z|$ koji se definira formulom:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Za modul kompleksnog broja vrijedi:

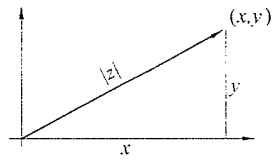
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \qquad |z^n| = |z|^n; \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0.$$

Kompleksna ili Gaussova ravnina. Svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovara točka $M(x, y)$ u kompleksnoj ravnini. Na os apscisa smješteni su realni brojevi pa se ona zove *realna os*. Na os ordinata smješteni su imaginarni brojevi pa se ona zove *imaginarna os*. Pridruživanje kompleksnih brojeva i točaka kompleksne ravnine obostrano je jednoznačno.



Udaljenost točke od ishodišta.

Modul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ kompleksnog broja $z = x + yi$ jednak je udaljenosti točke $M(x, y)$ od ishodišta koordinatnog sustava.



6. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Koliko je $(1-i)(1+i)(1+i^2)(1+i^4)(1+i^8)\cdot\ldots\cdot(1+i^{128})$?

Rješenje. Uzastopnim množenjem, a svaki put dobije se nova razlika kvadrata, dobit ćemo $1-i^{256}$. Kako je $i^{256}=(i^4)^{64}=1^{64}=1$, vrijednost danog umnoška jednaka je nuli.

No, do tog rezultata mogli smo doći i brže. Naime, lako je uočiti da je treći faktor umnoška jednak nuli: $1+i^2=1-1=0$. Dakle, onda je i cijeli izraz jednak nuli.

Primjer 2.

Izračunajmo: $1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{100}-i^{101}$.

Rješenje. U ovoj sumi ukupno su 102 pribrojnika. Ako uzmemo bilo koja četiri uzastopna, njihov će zbroj biti jednak nuli. Zašto? Objasnite!

Provedemo li grupiranje od kraja prema početku, u 25 skupina zboj će biti jednak nuli i preostat će samo prva dva pribrojnika. Rezultat je, dakle, $1-i$.

No, mogli smo postupiti i na razne druge načine. Primjerice, rastavimo zbroj u dvije skupine pribrojnika:

$$\begin{aligned}1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{100}-i^{101}&=(1+i^2+i^4+\ldots+i^{96}+i^{100})-(i+i^3+i^5+\ldots+i^{97}+i^{101})\\&=(1-1+1-1+\ldots-1+1)-(i-i+i-i+\ldots-i+i).\end{aligned}$$

I sada se u obje zagrade po dva uzastopna pribrojnika poništavaju. U obje je skupine po 51 pribrojnik pa nakon poništavanja u prvoj ostane broj 1, a u drugoj i.

Dakle, konačan je rezultat $1+i$.

Primjer 3.

Izračunajmo: $\left(\dfrac{i^{8n-5}+i^{4n+6}}{i^{12n-8}-i^{16n+9}}\right)^{44n+55}$.

Rješenje. Imamo redom: $i^{8n-5}=i^{8n-8}\cdot i^3=i^3=-i$; $i^{4n+6}=i^{4n+4}\cdot i^2=i^2=-1$; $i^{12n-8}=1$; $i^{16n+9}=i^{16n+8}\cdot i=i$.

I sada je:

$$\left(\frac{i^{8n-5}+i^{4n+6}}{i^{12n-8}-i^{16n+9}}\right)^{44n+55}=\left(\frac{-i-1}{1-i}\right)^{44n+55}=\left(\frac{-(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{44n+55}$$
$$=\left(\frac{-2i}{2}\right)^{44n+55}=(-i)^{44n+55}=-i^{44n+55}=-i^{55}=-i^3=i.$$

Primjer 4.

Za koje cijele brojeve n je $(n+i)^4$ realni broj?

Rješenje. Najprije izračunamo:

$$(n+i)^4=n^4+4n^3i+6n^2i^2+4ni^3+i^4=(n^4-6n^2+1)+(4n^3-4n)i.$$

I sada je dovoljno postaviti uvjet $4n(n^2-1)=0$, odakle je $n=0$ ili $n=-1$ ili $n=1$.

Primjer 5.

Ako je $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$, koliki je zbroj $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z$?

Rješenje. $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

I sada je: $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=\dfrac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2}=1$.

Primjer 6.

Odredimo realne brojeve a i b iz jednakosti: $\dfrac{a+bi}{1-i}=\dfrac{5}{1-2i}$.

Rješenje. Dana je jednakost ekvivalentna s jednakošću $(a+bi)\cdot(1-2i)=5\cdot(1-i)$. Ovu ćemo pak napisati u obliku:

$$a+2b+(-2a+b)i=5-5i.$$

Na temelju definicije jednakosti kompleksnih brojeva zaključujemo da mora biti $a+2b=5$ i $-2a+b=-5$. Rješenje ovog sustava jednadžbi je $a=3$, $b=1$.

Primjer 7.

Ako je $z = 1 - 2i$, $w = 2 + i$, odredimo realne brojeve x i y tako da vrijedi jednakost $\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{z}{w}$.

Rješenje. Nakon provedenih dijeljenja što su naznačena u svakom od tri razlomka, dolazimo do jednakosti $(x + 2y) + (2x - y)i = -5i$.

Ovo je jednakost dvaju kompleksnih brojeva iz kojih proistječe linearni sustav $x + 2y = 0$ i $2x - y = -5$ s rješenjem $x = -2$, $y = 1$.

Primjer 8.

Izračunajmo: $\left|\frac{(1-2i)^5}{(2-i)^7 \cdot (1-i)^4}\right|$.

Rješenje. Koristeći se svojstvima modula imamo:

$$\left|\frac{(1-2i)^5}{(2-i)^7 \cdot (1-i)^5}\right| = \frac{|1-2i|^5}{|2-i|^7 \cdot |1-i|^5} = \frac{(\sqrt{5})^5}{(\sqrt{5})^7 \cdot (\sqrt{2})^4} = \frac{1}{20}.$$

Primjer 9.

Odredimo sve kompleksne brojeve z za koje je $z^2 + \bar{z}^2 = 6$ i $z \cdot \bar{z} = 5$.

Rješenje. Neka je $z = a + bi$.

Tada je $z^2 + \bar{z}^2 = (a + bi)^2 + (a - bi)^2 = 2a^2 - 2b^2 = 6$, odnosno $a^2 - b^2 = 3$.

Iz $z \cdot \bar{z} = 5$, odnosno $(a + bi) \cdot (a - bi) = 5$, slijedi $a^2 + b^2 = 5$.

Tako imamo sustav jednadžbi $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$.

Ako zbrojimo i oduzmemo te jednadžbe, dobit ćemo $a^2 = 4$ te $b^2 = 1$.

Rješenje zadatka su kompleksni brojevi $z_{1,2} = \pm(2 + i)$, $z_{3,4} = \pm(2 - i)$.

Primjer 10.

Izračunajmo: $\sqrt{5 + 12i}$.

Rješenje. Korijen iz kompleksnog broja bit će kompleksan broj. To je broj za koji vrijedi jednakost $\sqrt{5 + 12i} = a + bi$. Kad ovu jednakost kvadriramo, dobit ćemo:

$$5 + 12i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$

gdje su a i b neki realni brojevi.

U posljednjoj jednakosti riječ je o jednakosti kompleksnih brojeva, zbog čega je $a^2 - b^2 = 5$ i $2ab = 12$. To je sustav jednadžbi. Ako obje jednadžbe kvadriramo i zbrojimo, dobit ćemo $(a^2 + b^2)^2 = 169$.

Dakle, $a^2 + b^2 = 13$. Ta jednadžba s jednadžbom $a^2 - b^2 = 5$ čini sustav jednadžbi s rješenjima $a^2 = 9$, $b^2 = 4$. Budući je $ab = 6$, rješenja su parovi $(3, 2)$ i $(-3, -2)$.

Dva su broja rješenje zadatka, broj $z_1 = 3 + 2i$ i broj $z_2 = -z_1$.

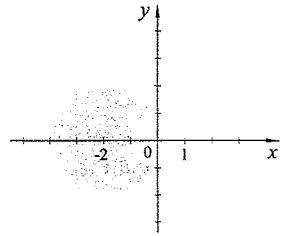
Primjer 11.

Odredimo skup rješenja sustava nejednadžbi $\begin{cases} |z| \geq 1 \\ |z + 2| \leq 2 \end{cases}$.

Pritom je z kompleksni broj.

Rješenje. Neka je $z = x + yi$. Tada prvu nejednadžbu sustava možemo zapisati u obliku $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$.

Ovim je uvjetom određen skup točaka koordinatne ravnine koje su od ishodišta udaljene za 1 ili više od 1.



To su sve točke izvan kruga omeđenog kružnicom sa središtem u ishodištu i polumjerom $r = 1$.

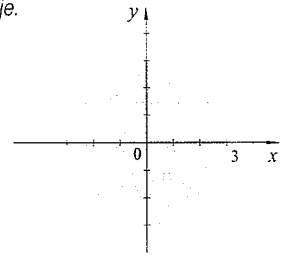
Analogno, drugi uvjet ćemo zapisati $\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} \leq 2$. Njime je određen skup točaka čija je udaljenost od točke $S(-2, 0)$ manja ili jednaka 2. To je drugim riječima krug omeđen kružnicom sa središtem u točki $S(-2, 0)$ i polumjerom $r = 2$.

Presjek ovih dvaju skupova točaka rješenje je zadatka. Svakoj točki toga presjeka odgovara neki kompleksni broj koji je rješenje zadanog sustava nejednadžbi.

Primjer 12.

Odredimo skup svih točaka z kompleksne ravnine koji je određen uvjetom $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$.

Rješenje.



Neka je $z = x + yi$.

Tada danu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$|x - 2 + yi|^2 + |x + 2 + yi|^2 = 26,$$

a zatim i u obliku:

$$(x - 2)^2 + y^2 + (x + 2)^2 + y^2 = 26.$$

Tako dolazimo do jednadžbe $x^2 + y^2 = 9$, što je jednadžba kružnice sa središtem u točki $z = 0$ i polumjerom $r = 3$.

6. lekcija Zadaci

1. Izračunajte: $\left(\dfrac{i^{123}-i^{234}}{i^{345}-i^{456}}\right)^{567}$.

2. Izračunajte:

$$i+i^3+i^5+\ldots+i^{99}+i^{101}.$$

3. Izračunajte:

$$\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\ldots+\frac{1}{i^{22}}\right)^{22}.$$

4. Izračunajte vrijednost izraza:

$$(1+i)^{30}+(1-i)^{30}.$$

5. Odredite realni i imaginarni dio kompleksnog broja z:

1) $z=(1-i)^2(1-2i)^2$;

2) $z=\dfrac{3-2i}{(1+3i)(2-i)}$.

6. Ako je $z=a+bi$, $z\neq 0$, koliko je $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}+\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}$?

7. Izračunajte:

1) $(1-i\sqrt{3})^6$; **2)** $(\sqrt{3}-i)^6$.

8. Provjerite jesu li kompleksni brojevi $z_1=1-2i$ i $z_2=1+i$ rješenja jednadžbe $(1+i)z^2-(3+i)z+4+2i=0$.

9. Odredite kompleksni broj z iz jednakosti $z\cdot(1-i)+\overline{z}\cdot(2+i)=3i$.

10. Odredite realne brojeve x i y tako da vrijedi jednakost:

$$x\cdot\frac{1-i}{2-i}+y\cdot\frac{2-i}{1-i}=\frac{1}{i}.$$

11. U skupu kompleksnih brojeva riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} i\cdot z+\overline{w}=1 \\ \overline{z}-iw=2-i \end{cases}.$$

12. Dani su kompleksni brojevi $z=1-2i$ i $w=2+i$. Za koje je realne brojeve x i y ispunjena jednakost $x\cdot z+y\cdot w=z\cdot w$?

13. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu $zi=z+i$, $z\in\mathbf{C}$.

14. Odredite $\operatorname{Re} w$ ako je $w=\dfrac{1}{z^2-i\cdot\overline{z}}$, gdje je $z=1-i$.

15. Izračunajte $\left|\dfrac{z\cdot\overline{w}-\overline{z}\cdot w}{z^2-w^2}\right|$ ako je: $z=1-i$, $w=2+i$.

16. Odredite $|z|$ ako je:

1) $z=(1-i)(1-2i)(2-i)(1-3i)(3-i)$;

2) $z=\dfrac{(1-3i)^7}{(1+i)^9\cdot(2-i)^{11}}$.

17. Izračunajte: $\operatorname{Im}\dfrac{z^6+|z|+i^{-111}}{\overline{z}\cdot z+i^{111}}$, gdje je $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

18. Kolika je udaljenost točaka koje u kompleksnoj ravnini pripadaju brojevima $z=1-2i$ i $w=2-3i$?

19. Točke kompleksne ravnine koje su pridružene brojevima $z_1=1+2i$, $z_2=-2+i$, $z_3=-1-2i$ vrhovi su kvadrata. Odredite kompleksni broj pridružen četvrtom vrhu tog kvadrata.

20. Prikažite u kompleksnoj ravnini skup svih točaka z koje su zadane uvjetom $|z+1|=|z+i|$.

21. Prikažite u kompleksnoj ravnini skup točaka z koji je određen sustavom nejednadžbi $|z-1|\leq 2$ i $|z+i|\geq 2$.

6. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Vrijednost potencije $(i^{4k+3})^{8k+5}$, gdje je i imaginarna jedinica, a $k\in\mathbf{Z}$ jednaka je:

A. 1 **B.** i **C.** -1 **D.** $-i$

2. Umnožak $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{101}$ jednak je:

A. 1 **B.** i **C.** -1 **D.** $-i$

3. Kompleksni broj $x=m+i$ rješenje je jednadžbe $x^2+2x+n=0$. Tada je:

A. $mn=-2$ **B.** $mn=3$ **C.** $mn=-1$ **D.** $mn=6$

4. Ako je $z=\dfrac{2-i}{1+i}$, onda je $\operatorname{Im}\dfrac{1}{\overline{z}}$ jednako:

A. $\dfrac{1}{5}$ **B.** $-\dfrac{3}{5}$ **C.** $\dfrac{3}{10}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

5. $|(1-i)^2\cdot(1-2i)^2\cdot(1-3i)^2|=$

A. 100 **B.** 10 **C.** $10\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{5}$

6. Ako je $w=\dfrac{\overline{z}}{z^2}$ te $z=1-3i$, onda je:

A. $|w|=\sqrt{10}$ **B.** $|w|=\dfrac{2\sqrt{5}}{10}$ **C.** $|w|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **D.** $|w|=2\sqrt{5}$

7. Jednakost $(1+ai)(1-2i)=(1+i)(1-bi)$ ispunjena je ako je:

A. $a+b=3$ **B.** $a+b=-1$ **C.** $a+b=-4$ **D.** $a+b=2$

8. Ako je $(-1+3i)^3=a+bi$, onda je:

A. $a=11$, $b=14$ **B.** $a=26$, $b=16$
C. $a=26$, $b=-18$ **D.** $a=16$, $b=-14$

9. Udaljenost dviju točaka koje su u kompleksnoj ravnini pridružene brojevima $z_1=-1+3i$ i $z_2=4-2i$ jednaka je:

A. $5\sqrt{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{40}$ **D.** 6

10. Sustavom nejednadžbi $|z-i|<2$ i $|z+2|\geq 2$ određen je podskup točaka kompleksne ravnine. Tom skupu pripada i točka pridružena kompleksnom broju z:

A. $z=1-2i$ **B.** $z=2+i$ **C.** $z=1-i$ **D.** $z=1+2i$

Ispit 2

1. Jedan faktor u rastavu polinoma $x^4 - 1$ na faktore jest i kompleksni broj:
   A. $1 - xi$ **B.** $x - i$ **C.** $-1 - xi$ **D.** $-i$

2. Umnožak $i \cdot i^4 \cdot i^7 \cdot \ldots \cdot i^{103}$ jednak je:
   A. 1 **B.** i **C.** -1 **D.** $-i$

3. Ako je $z = i^{4k} - i^{4k+3} - i^{4k+6} + i^{4k+9}$, $k \in \mathbf{Z}$, onda je z^{100} jednako:
   A. 1 **B.** -4^{75} **C.** 2^{200} **D.** -2^{150}

4. $|(1-i)^3 \cdot (2-i)^3 \cdot (3-i)^3| =$
   A. 100 **B.** $1\,000$ **C.** $10\sqrt{10}$ **D.** $10\sqrt{2}$

5. Iz $(1-i)^5 = a + bi$ slijedi:
   A. $a - b = 1$ **B.** $a + b = 0$ **C.** $a + b = -1$ **D.** $a - b = 0$

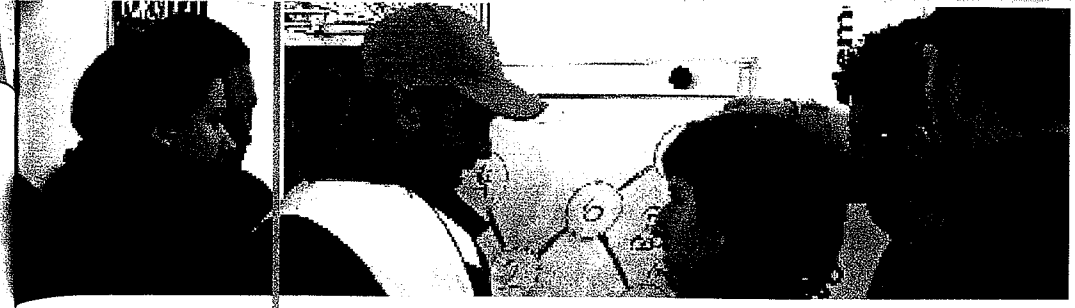
6. Ako je $z = 2 + 3i$, onda je $\operatorname{Re}\frac{1}{z^2}$ broj iz intervala:
   A. $\langle -0.01, -0.001 \rangle$ **B.** $\langle -0.1, -0.01 \rangle$
   C. $\langle -0.1, 0 \rangle$ **D.** $\langle 0, 0.1 \rangle$

7. Jednakost $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2i} = i$ točna je za realne brojeve x i y za koje vrijedi jednakost:
   A. $xy = 1$ **B.** $x - y = 1$ **C.** $xy = -1$ **D.** $x + y = 1$

8. Za kompleksne brojeve $z = \sqrt{3} - i$ i $w = 1 + 2\sqrt{2}i$ vrijedi:
   A. $|z^3w^4| = 24$ **B.** $|z^3w^4| = 36$ **C.** $|z^3w^4| = 48$ **D.** $|z^3w^4| = 648$

9. Udaljenost od ishodišta one točke u kompleksnoj ravnini koja je pridružena broju $2 - 4i$ jednaka je:
   A. $5\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{42}$ **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $4\sqrt{5}$

10. Skup rješenja jednadžbe $|z - 1| = |z + 1|$ je skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi:
    A. $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ **B.** $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ **C.** $\operatorname{Re} z = 0$ **D.** $\operatorname{Im} z = 0$



7. lekcija

Kvadratna funkcija, jednadžbe i nejednadžbe

7. lekcija Ponovimo

Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija ili **polinom drugog stupnja** je funkcija zadana formulom:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Koeficijenti a, b i c su realni brojevi, $a \neq 0$. Ova funkcija definirana je za svaki realni broj, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Graf kvadratne funkcije je parabola s tjemenom u točki $T = (x_0, y_0)$, pri čemu je:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Kažemo da kvadratna funkcija ima ekstrem u točki s apscisom $x_0 = -\frac{b}{2a}$, a vrijednost ekstrema iznosi $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Ako je $a > 0$, onda je na intervalu $\langle -\infty, x_0 \rangle$ funkcija padajuća, a na intervalu $\langle x_0, \infty \rangle$ rastuća i ekstrem je minimum.

Ako je $a < 0$, onda je na intervalu $\langle -\infty, x_0 \rangle$ funkcija rastuća, a na intervalu $\langle x_0, \infty \rangle$ padajuća i ekstrem je maksimum.

Nultočke kvadratne funkcije

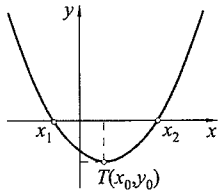
Broj x_0 je **nultočka kvadratne funkcije** $f(x) = ax^2 + bx + c$ ako vrijedi $f(x_0) = 0$. Nultočke su realni ili komleksni brojevi.

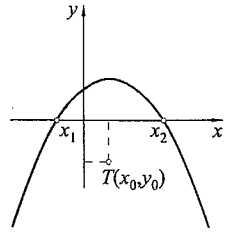
Ako je nultočka funkcije realna, onda je ona apscisa točke u kojoj graf funkcije siječe (ili dira) x-os.

Nultočke se određuju tako da se izračunaju sva rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Crtanje grafa kvadratne funkcije pomoću nultočaka i tjemena

1. Utvrdimo predznak vodećeg koeficijenta.
2. Odredimo nultočke x_1, x_2.
3. Izračunamo apscisu x_0 tjemena: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
4. Izračunamo ordinatu tjemena: $y_0 = f(x_0)$.





Kvadratna jednadžba

Jednadžba oblika:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su a, b i c realni brojevi i $a \neq 0$, naziva se **kvadratna jednadžba**. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se **rješenje kvadratne jednadžbe**.

Brojevi a, b i c su **koeficijenti kvadratne jednadžbe** $ax^2 + bx + c = 0$. Broj a je **vodeći koeficijent** te jednadžbe i on mora biti različit od nule, inače jednadžba nije kvadratna. Broj b je **koeficijent linearnog člana**, a broj c je **slobodni član** jednadžbe.

Ako je $b = 0$, $c \neq 0$, kvadratna jednadžba poprima oblik $ax^2 + c = 0$, odnosno oblik:

$$x^2 = k, \qquad (k \neq 0)$$

i ima dva rješenja.

1. Ako je $k > 0$, rješenja su realni brojevi $x_1 = \sqrt{k}$ i $x_2 = -\sqrt{k}$.
2. Ako je $k < 0$, rješenja su imaginarni brojevi $x_1 = i\sqrt{|k|}$ i $x_2 = -i\sqrt{|k|}$.

Ako je $b \neq 0$, $c = 0$, kvadratna jednadžba je oblika:

$$ax^2 + bx = 0, \qquad (b \neq 0)$$

i ima dva rješenja. Oba rješenja su realni brojevi. Jedno rješenje je $x_1 = 0$, a drugo $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Ako je $b = c = 0$, jednadžba $ax^2 = 0$ ima dvostruko rješenje $x = 0$.

Rješenja opće kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ su brojevi:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Za kvadratnu jednadžbu čiji je vodeći koeficijent jednak 1 kažemo da je **normirana**. Svaku kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ možemo normirati dijeljenjem s a. Onda dobijemo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Uvođenjem oznaka $\frac{b}{a} = p$ i $\frac{c}{a} = q$, tu jednadžbu zapisujemo u obliku:

$$x^2 + px + q = 0$$

i rješavamo po formuli:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ je broj:

$$D = b^2 - 4ac$$

i o njoj ovisi kakva će biti rješenja kvadratne jednadžbe.

1. Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna i različita rješenja.
2. Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
3. Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno konjugirana rješenja.

Viètеove formule

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ zadovoljavaju **Viètеove** formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Vrijedi i obrnuto:

Ako za dva broja x_1 i x_2 vrijede gornje dvije jednakosti, onda su ti brojevi rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Ako su zadani brojevi x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe, ta jednadžba u svojem normiranom obliku glasi:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Kvadratna jednadžba s rješenjima x_1 i x_2 glasi:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji odabran broj.

Faktorizacija kvadratnog trinoma. Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Izravna primjena Viètеovih formula. Ako vrijedi $x_1 + x_2 = m$, $x_1 x_2 = n$, onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x^2 - mx + n = 0.$$

Bikvadratna jednadžba

Jednadžbu četvrtog stupnja koja ima oblik:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

zovemo **bikvadratnom jednadžbom**. Pritom su koeficijenti a, b i c realni brojevi.

Zamjenom $x^2 = t$ rješavanje bikvadratne jednadžbe prevodimo na rješavanje kvadratne jednadžbe $at^2 + bt + c = 0$.

Bikvadratna jednadžba ima četiri rješenja. Ovisno o tome jesu li rješenja t_1, t_2 pripadne kvadratne jednadžbe realna ili kompleksna, te pozitivna ili negativna, bikvadratna jednadžba može imati četiri, dva ili nijedno realno rješenje.

Kvadratne nejednadžbe

Kvadratne nejednadžbe su nejednadžbe oblika:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

ili pak:

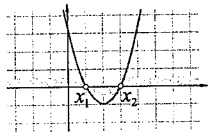
$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Riješiti kvadratnu nejednadžbu znači odrediti skup svih realnih brojeva x za koje funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ prima pozitivne, odnosno negativne vrijednosti. Pritom treba obratiti pozornost na sljedeće:

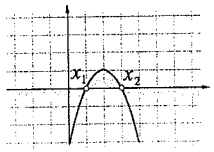
1. predznak vodećeg koeficijenta, jer on utječe na "otvorenost" parabole prema gore ili prema dolje;
2. vrstu nejednakosti, > 0 ili < 0;
3. predznak diskriminantne, jer on utječe na broj nultočaka.

Skica pokazuje kako vrijednosti kvadratne funkcije ovise o predznacima vodećeg koeficijenta i diskriminante. Skup svih realnih brojeva x za koje je vrijednost funkcije $f(x)$ pozitivna iscrtan je iznad, a skup za koji je $f(x) < 0$ iscrtan je ispod osi apscisa.

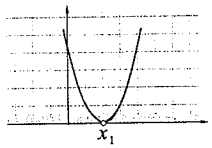
$a > 0$
$D > 0$



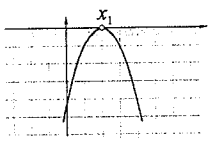
$a < 0$
$D > 0$



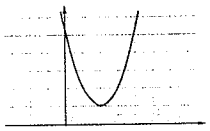
$a > 0$
$D = 0$



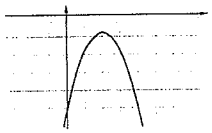
$a < 0$
$D = 0$



$a > 0$
$D < 0$



$a < 0$
$D < 0$



Neke se nejednadžbe rješavaju tako da promatramo ekvivalentnu kvadratnu nejednadžbu (nejednadžbu s istim skupom rješenja). Pri sređivanju nejednadžbe treba pomnjivo primijeniti svojstva relacije uređaja.

7. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Riješimo jednadžbu:

$$\frac{5}{4x^2-36}+\frac{1}{5x}=\frac{1}{4x+12}-\frac{1}{3x-x^2}.$$

Rješenje. Prvo utvrdimo koje vrijednosti x ne mogu biti rješenja. Faktoriziranjem svakog od nazivnika dobivamo:

$$\frac{5}{4(x-3)(x+3)}+\frac{1}{5x}=\frac{1}{4(x+3)}-\frac{1}{x(3-x)}.$$

Dakle, rješenja ne mogu biti $x=0$, $x=3$ i $x=-3$. Pomnožimo jednadžbu sada s najmanjim zajedničkim višekratnikom ($20x(x-3)(x+3)$), pri čemu valja pripaziti na član $-\frac{1}{x(3-x)}$, koji možemo zapisati u obliku $-\frac{1}{-x(x-3)}=\frac{1}{x(x-3)}$. Dakle, dobivamo jednadžbu oblika:

$$5\cdot 5x+4(x^2-9)=5x(x-3)+20(x+3).$$

Pojednostavnjivanjem slijedi:

$$x^2-20x+96=0.$$

Rješenja jednadžbe su $x_1=8$ i $x_2=12$.

Primjer 2.

Riješimo jednadžbu: $\frac{x+1}{2x^2}+\frac{3x^2}{x+1}=\frac{5}{2}$.

Rješenje. Ovaj je primjer tipičan zadatak pri čijem se rješenju uvodi nova nepoznanica. Neka je, dakle, $\frac{x+1}{x^2}=u$. Jednadžba uz ovu zamjenu prima oblik:

$$\frac{1}{2}u+3\cdot\frac{1}{u}=\frac{5}{2}.$$

Nakon sređivanja dobijemo kvadratnu jednadžbu $u^2-5u+6=0$. Njezina su rješenja $u_1=2$, $u_2=3$.

I sada se iz $\frac{x+1}{x^2}=2$ dobije $2x^2-x-1=0$ i onda $x=-\frac{1}{2}$ ili $x=1$.

A iz $\frac{x+1}{x^2}=3$ slijedi $3x^2-x-1=0$ i onda $x=\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ ili $x=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.

I tako, zadana jednadžba ima četiri realna rješenja.

Primjer 3.

Riješimo jednadžbu: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+3}$.

Rješenje. Iz sustava uvjeta $x+1\geq 0$, $x+2\geq 0$ i $x+3\geq 0$ slijedi $x\geq -1$. Ako jednadžba ima realnih rješenja, onda to mogu biti jedino brojevi koji nisu manji od -1.

Kvadrirajmo sada jednadžbu:

$$x+1+2\sqrt{(x+1)(x+2)}+x+2=x+3.$$

Sada ovu jednadžbu zapišimo u obliku $2\sqrt{(x+1)(x+2)}=-x$. Želimo naime *izolirati* član s drugim korijenom na jednoj strani jednadžbe kako bi se nakon ponovnog kvadriranja *izgubio* korijen. Tako dobijemo kvadratnu jednadžbu:

$$3x^2+12x+8=0$$

s rješenjima $x_{1,2}=-2\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

No kako se zahtijeva $x\geq -1$, onda je broj $x=-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ jedino rješenje zadane jednadžbe.

Primjer 4.

Dana je jednadžba $px(1+x)+2=2x(p+x)$ u kojoj je x nepoznanica, a p realan parametar.

1) Za koje vrijednosti parametra p jednadžba ima realna rješenja?

2) Ako je -2 jedno rješenje jednadžbe, odredimo drugo rješenje.

3) Za koji p je umnožak rješenja ove jednadžbe veći od njihova dvostrukog zbroja?

Rješenje. Najprije ćemo srediti danu kvadratnu jednadžbu i dobiti je u standardnom obliku:

$$(p-2)x^2-px+2=0.$$

1) Da bi kvadratna jednadžba imala realna rješenja, njezina diskriminanta mora biti veća od nule ili jednaka nuli.

Izračunamo diskriminantu i dobijemo $D=p^2-8(p-2)=p^2-8p+16=(p-4)^2$.

Vidimo da je za $p=4$ diskriminanta jednaka nuli i tada su rješenja jednadžbe jednaki realni brojevi.

Za svaki drugi p diskriminanta je pozitivan broj.

Zato ova kvadratna jednadžba ima realna rješenja za svaki realni broj p.

2) Uvrstimo u jednadžbu $x=-2$ pa imamo $4(p-2)+2p+2=0$. Odatle je $p=1$ i imamo jednadžbu $-x^2-x+2=0$ čije je jedno rješenje zadani $x=-2$, a drugo $x=1$.

3) Iz uvjeta $x_1\cdot x_2>2\cdot(x_1+x_2)$ slijedi $\frac{2}{p-2}>2\cdot\frac{p}{p-2}$, odnosno $\frac{2(p-1)}{p-2}<0$. Rješenje ove nejednadžbe je $1<p<2$.

Primjer 5.

Zbroj rješenja jednadžbe $x^2+mx+n=0$ jednak je -2, a razlika rješenja iznosi 5. Odredimo brojeve m i n.

Rješenje. Najprije iz $x_1+x_2=-m=-2$ slijedi $m=2$.

Iz sustava jednadžbi $x_1+x_2=-2$ i $x_1-x_2=5$ nalazimo $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{7}{2}$.

Kako je $x_1\cdot x_2=n$, slijedi $n=-\frac{21}{4}$.

Primjer 6.

Jedno rješenje kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima je kompleksni broj $x=\frac{1}{1-i}$. Odredimo tu jednadžbu.

Rješenje. Najprije dano rješenje zapišimo u standardnom obliku $x=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Kako se zahtijeva da koeficijenti jednadžbe koju tražimo budu realni brojevi, drugo rješenje jednadžbe mora biti broj konjugiran prvom rješenju, dakle broj $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. Koristeći se Viètovim formulama, sada možemo računati: $x_1+x_2=1$, $x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$.

I sada možemo zapisati jednadžbu u njezinu normiranom obliku: $x^2-x+\frac{1}{2}=0$.

Primjer 7.

Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} x^2y+xy^2=20 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4} \end{cases}$.

Rješenje. Najprije primijetimo kako je ovdje riječ o *simetričnom* sustavu jednadžbi. To znači da se zamjenom nepoznanice x nepoznanicom y, a nepoznanice y nepoznanicom x, sustav ne mijenja. To dalje povlači da ako je uređeni par (x_0, y_0) rješenje sustava, onda je rješenje i uređeni par (y_0, x_0).

Prvu jednadžbu sustava zapišimo u obliku $xy(x+y)=20$, a drugu u obliku $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{4}$. Pomnožimo ove dvije jednadžbe i dobijemo $(x+y)^2=25$. Odatle je $x+y=5$ ili $x+y=-5$. Potom nalazimo $xy=4$ ili $xy=-4$.

Za $x+y=5$ i $xy=4$ imamo kvadratnu jednadžbu $t^2-5t+4=0$ čija su rješenja x i y. Dobije se $t=1$ ili $t=4$, što daje dva rješenja zadanog sustava, $(1,4)$ i $(4,1)$.

Ako je $x+y=-5$, onda je $xy=-4$ pa iz jednadžbe $t^2-5t-4=0$ dobijemo još dva rješenja sustava: $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2},\frac{-5-\sqrt{41}}{8}\right)$ i $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2},\frac{-5+\sqrt{41}}{8}\right)$.

Primjer 8.

Prikažimo u obliku umnoška polinom:

$$p(x)=(2x^2-x)^2-11(2x^2-x)+10.$$

Rješenje. Polinom drugog stupnja rastavljamo u faktore primjenom sljedećeg identiteta: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, koji vrijedi za sve realne brojeve x.

Zadani polinom uz zamjenu $2x^2-x=u$ možemo zapisati u obliku $p(u)=u^2-11u+10$. Korijeni ovog polinoma su $u_1=1$ i $u_2=10$, pa možemo zapisati $p(u)=(u-1)(u-10)$.

Dakle, $p(x)=(2x^2-x-1)(2x^2-x-10)$.

Polinome drugog stupnja koji su faktori polinoma p možemo istim postupkom prikazati kao umnoške polinoma prvog stupnja.

Korijeni polinoma $2x^2-x-1$ su brojevi $-\frac{1}{2}$ i 1, a korijeni polinoma $2x^2-x-10$ su $\frac{5}{2}$ i -2.

Tako imamo $p(x)=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right)$, što možemo konačno zapisati u obliku:

$$p(x)=(x-1)(x+2)(2x+1)(2x-5).$$

Primjer 9.

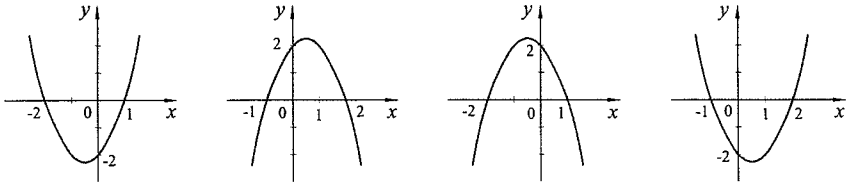
Riješimo jednadžbu $(x-1)^4+5(x-1)^2=36$.

Rješenje. Zadana jednadžba je jednadžba 4. stupnja. Zamjenom $(x-1)^2=t$ ona poprima oblik $t^2+5t-36=0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1=4, t_2=-9$.

Vratimo se sada na izvornu nepoznanicu x pa je $(x-1)^2=4$ ili $(x-1)^2=-9$. Iz prve od ovih dviju jednadžbi dobijemo dva rješenja, $x_1=-1$ i $x_2=3$, a iz druge još dva, $x_{3,4}=1\pm 3i$.

Primjer 10.

Na kojoj je od četiri slike prikazan graf polinoma $f(x)=-x^2-x+2$?



Rješenje. Najprije valja odmah odbaciti prijedloge na prvoj i posljednjoj slici. Zašto? Na objema slikama grafovi su polinoma drugog stupnja kojima je koeficijent kvadratnog člana pozitivan broj.

Ostaje provjeriti dva ostala prijedloga. Najjednostavnije je uvrstiti nultočke u dani polinom. Tako ćemo lako zaključiti da je rješenje graf na trećoj slici.

Primjer 11.

Na slici je prikazan graf jednog od sljedeća četiri polinoma drugog stupnja:

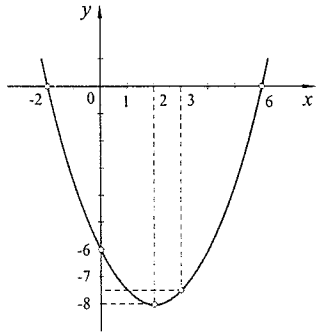
1) $f(x)=-x^2-4x-6$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-6$;

3) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x-6$;

4) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x-6$.

Kojeg?



Rješenje. Polinom f čiji je graf na slici omeđen je odozdo, ima minimum. To onda znači da mu je koeficijent a kvadratnog člana pozitivan broj. Tako otpadaju prijedlozi

1) i 3). Za oba polinoma, i onaj pod 2) i onaj pod 4), vrijedi $f(0) = -6$, a to znači da grafovi tih obiju funkcija presijecaju os y u istoj točki. Po tome se, dakle, ne razlikuju.

Preostaje još provjeriti nultočke. Kako za polinom pod 2) vrijedi $f(-2) = f(6) = 0$, a za polinom pod 4) vrijedi $f(-2) = -3$, onda je rješenje zadatka polinom pod 2).

Primjer 12.

Dana je funkcija $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1) Za koju vrijednost od x ova funkcija prima ekstremnu vrijednost? Kolika je ta vrijednost?

2) Odredimo skup svih vrijednosti polinoma f.

3) Odredimo nultočke funkcije f.

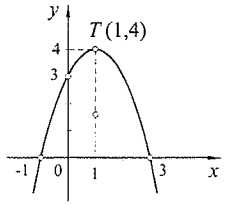
4) Nacrtajmo graf funkcije i opišimo njezin tok.

Rješenje. **1)** Za $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$ funkcija prima ekstremnu vrijednost $y_0 = f(1) = 4$. Kako je $a = -1 < 0$, ta je vrijednost najveća ili maksimalna. Kažemo još da funkcija za $x_0 = 1$ ima maksimum $y_0 = 4$.

2) Koeficijent a kvadratnog člana ovog polinoma jednak je -1, dakle negativan pa je zato taj polinom omeđen odozgo, maksimalna mu je vrijednost $y = 4$. Ovaj polinom prima vrijednosti iz intervala $\langle -\infty, 4]$.

3) Nultočke funkcije su one vrijednosti varijable x za koje je $f(x) = 0$. U našem primjeru, iz $-x^2 + 2x + 3 = 0$ dobijemo nultočke $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

4)



U koordinatnom sustavu možemo odrediti nekoliko točaka koje pripadaju paraboli, grafu zadane kvadratne funkcije. To je tjeme, $T(1,4)$, to su nultočke $(-1,0)$ i $(3,0)$, i to je točka $(0,3)$ u kojoj parabola presijeca os ordinata. Primijeti da je za svaku funkciju ovu točku jednostavno odrediti, to je točka $(0,c)$.

Sada nacrtamo parabolu vodeći računa o tome da je ona simetrična prema pravcu $x = 1$.

Vrijednosti polinoma f rastu od $-\infty$ i negativne su sve do prve nultočke, $x_1 = -1$, kada je $f(-1) = 0$. Za $-1 < x < 1$ vrijednosti funkcije su pozitivne i rastu do najveće vrijednosti 4 koju polinom prima za $x_0 = 1$. Prijelazom preko $x = 1$ vrijednosti funkcije padaju. Nakon prelaska druge nultočke $x_2 = 3$ vrijednosti funkcije postaju opet negativne i daljim porastom x sve su manje.

Primjer 13.

Odredimo polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ ako je $f(-1) = f(1) = 2$ te $f(0) = 3$.

Rješenje. Iz $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3$, slijedi $c = 3$.

Iz uvjeta $f(-1) = f(1)$ slijedi $a - b + c = a + b + c$ pa je $b = 0$. Dakle, f je kvadratna funkcija oblika $f(x) = ax^2 + 3$.

I sada iz $f(-1) = 2$ dobijemo $a + 3 = 2$, odnosno $a = -1$.

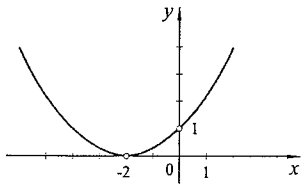
Polinom koji zadovoljava uvjete zadatka jest $f(x) = -x^2 + 3$.

Primjer 14.

Broj -2 dvostruka je nultočka polinoma drugog stupnja. Ako je $f(0) = 1$, odredimo taj polinom.

Rješenje. Taj je polinom oblika $f(x) = a(x - x_1)^2$, gdje je x_1 dvostruka nultočka. Dakle, $f(x) = a \cdot (x + 2)^2$.

No, iz $f(0) = 1$ slijedi $f(0) = 4a = 1$, pa je $a = \frac{1}{4}$.



Rješenje zadatka je polinom $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

Primjer 15.

Jednadžbom $f(x) = mx^2 - x + 1$, u kojoj je broj m realan parametar, zadan je skup polinoma drugog stupnja.

1) Koji od tih polinoma imaju realne korijene?

2) Odredimo onaj polinom ovoga skupa čija je ekstremna (najveća ili najmanja) vrijednost jednaka -1.

3) Odredimo skup točaka ravnine što ga čine tjemena parabola koje su grafovi polinoma iz danog skupa.

Rješenje. **1)** Da bi polinom imao realne korijene nužno je i dovoljno da diskriminanta polinoma bude veća od nule ili jedanaka nuli. Iz tog uvjeta, $D \geq 0$, slijedi $1 - 4m \geq 0$, te je $m \leq \frac{1}{4}$.

Zaključimo: Za svaku vrijednost realnog parametra m, $m \leq \frac{1}{4}$, $m \neq 0$ dobijemo polinom drugog stupnja f čija su oba korijena realni brojevi.

2) Ekstremna vrijednost polinoma drugog stupnja računa se iz $y_0 = -\frac{D}{4a}$. Tako dobijemo $-\frac{1 - 4m}{4m} = -1$, a odatle je $m = \frac{1}{8}$.

Zaključujemo da ekstremnu, u ovom slučaju najmanju, vrijednost $y_0 = -1$ prima onaj polinom koji se dobije kada se za m uvrsti $m = \frac{1}{8}$.

3) Odredimo koordinate tjemena svih parabola ovog skupa. Najprije odredimo apscise: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2m}$. A zatim i ordinate: $y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{1-4m}{4m} = -\frac{1}{4m} + 1$.

Za poseban odabir parametra m iz skupa izdvajamo parabolu čije tjeme određujemo iz $\left(\frac{1}{2m}, 1 - \frac{1}{4m}\right)$.

Ako iz sustava $x_0 = \frac{1}{2m}$, $y_0 = -\frac{1}{4m} + 1$ "izbacimo" parametar m, dobijemo jednadžbu $y_0 = -\frac{1}{2}x_0 + 1$. Ta je jednadžba očito jednadžba pravca.

Promjenom parametra m mijenjaju se parabole, a time i njihova tjemena, ali tako da "opisuju" pravac čiju smo jednadžbu dobili.

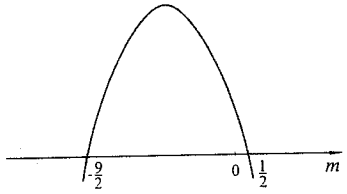
Primjer 16.

S $f(x) = mx^2 - (2m-3)x + 2m + 1$, $m \neq 0$ zadan je skup polinoma drugog stupnja. Za koje vrijednosti realnog parametra m dobijemo polinom koji prima negativne vrijednosti za sve $x \in \mathbf{R}$?

Rješenje. Da bi polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2+bx+c$ primao negativne vrijednosti na cijelom području definicije, da bi drugim riječima, za svaki x vrijednost polinoma f bila negativan broj, nužno je i dovoljno da je $a < 0$ i $D < 0$.

Dakle, mora biti $m < 0$ i $D = (2m-3)^2 - 4m(2m+1) < 0$.

Drugu nejednadžbu zapisat ćemo najprije u obliku $-4m^2 - 16m + 9 < 0$.



Nultočke polinoma s lijeve strane ove nejednadžbe su: $m = -\frac{9}{2}$ i $m = \frac{1}{2}$. Skiciramo graf toga polinoma pa s crteža očitamo rješenje nejednadžbe: $m < -\frac{9}{2}$ ili $m > \frac{1}{2}$.

Uvažimo još uvjet $m < 0$ s početka pa zaključujemo: za svaki m, $m < -\frac{9}{2}$ dobije se polinom koji prima negativne vrijednosti za sve vrijednosti realnog broja x.

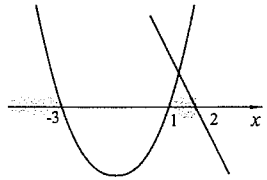
Primjer 17.

Riješimo nejednadžbu: $\frac{x^2+1}{x^2+2x-3} > 1$.

Rješenje. Najprije ćemo nejednadžbu zapisati u obliku koji je pogodniji za rješavanje:

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x-3} - 1 = \frac{-2x+4}{x^2+2x-3} > 0.$$

U brojniku ovog razlomka imamo linearnu, a u nazivniku kvadratnu funkciju. Predočimo ih grafički na istoj slici. Dovoljno je za taj prikaz točno poredati nultočke obiju funkcija i skicirati njegove grafove. Zatim ćemo s te skice očitati rješenje dane nejednadžbe.



Rješenje je unija intervala $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 1, 2]$.

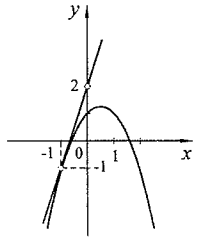
Primjer 18.

Odredimo jednadžbu tangente na parabolu $y = -x^2 + x + 1$ ako je ta tangenta paralelna pravcu $y = 3x + 11$. Odredimo i koordinate dirališta pravca i parabole.

Rješenje. Tangenta koju tražimo ima isti nagib kao i zadani pravac, pa je tangenta pravac čija je jednadžba oblika $y = 3x + b$.

Želimo li odrediti točku u kojoj se sijeku parabola $y = -x^2 + x + 1$ i neki pravac iz skupa pravaca $y = 3x + b$, moramo riješiti sustav ovih dviju jednadžbi. Tako dolazimo do kvadratne jednadžbe $x^2 + 2x + b - 1 = 0$.

Pravac i parabola sijeku se u dvije različite točke ako je diskriminanta ove jednadžbe pozitivan broj, a uopće se ne sijeku ako je diskriminanta negativna.



Da bi pravac s parabolom imao jednu zajedničku točku, uvjet je da je diskriminanta iste kvadratne jednadžbe jednaka nuli: $D = 8 - 4b = 0$. Tako dobijemo $b = 2$, a time i pravac $y = 3x + 2$ koji je tangenta parabole.

Za $b = 2$ kvadratna jednadžba prima oblik $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$. Rješenje ove jednadžbe $x_1 = x_2 = -1$ apscisa je dirališta, a i ordinata dirališta jednaka je -1.

Primjer 19.

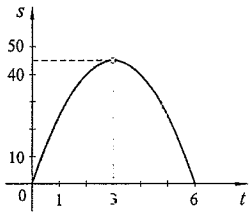
Vertikalni hitac je složeno gibanje koje se sastoji od jednolikog gibanja po pravcu i slobodnog pada. Prijeđeni put kod vertikalnog hica jest funkcija koja ovisi o vremenu $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, gdje je v_0 brzina kojom

je tijelo izbačeno. Ako je $v_0 = 30$ m/s, koliki je domet vertikalnog hica? Koliko vremena prođe od izbacivanja tijela do dosizanja te najveće visine? (Uzmimo da je $g = 10$ m/s.)

Rješenje. Jednadžba ovoga gibanja glasi $s = -5t^2+30t$. To je očito kvadratna funkcija. Najveću vrijednost, a to znači domet, $s = 45$ m tijelo postigne nakon $t = 3$ sekunde gibanja.

Prikažimo grafički gibanje tijela u opisano u ovom zadatku.

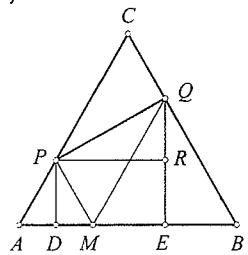
Graf je parabola s nultočkama $t = 0$ i $t = 6$. Vidimo da prijeđeni put raste, da nakon tri sekunde dosiže najveću vrijednost i da se nakon šest sekundi tijelo vrati u položaj s kojega je izbačeno.



Primjer 20.

Na stranici $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ odabere se točka M pa se tom točkom polože paralele stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Paralela stranici $\overline{BC}$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki P, a paralela stranici $\overline{AC}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki Q. Uz koji položaj točke M je dužina $\overline{PQ}$ najkraća?

Rješenje.



Promotrimo sliku. Na njoj su $\overline{PD}$ i $\overline{QE}$ visine u jednakostraničnim trokutima $\triangle AMP$, odnosno $\triangle MBQ$. Označimo li $|AM| = x$, onda je

$$|PD| = \frac{1}{2}x\sqrt{3},$$

$$|QE| = \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{3}$$

Uočimo pravokutni trokut $\triangle RQP$. Izrazimo duljinu njegove hipotenuze:

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2 = 3x^2 - 3ax + a^2.$$

$|PQ|$ će imati najmanju vrijednost kada $|PQ|^2$ bude najmanje, a to je za $x = \frac{a}{2}$. Ta je vrijednost jednaka $\frac{a}{2}$, a tada je dužina $\overline{PQ}$ srednjica trokuta. Točka M polovište je stranice $\overline{AB}$.

7. lekcija Zadaci

1. Riješite jednadžbe:

1) $x^2-2(a+b)x+(a+b)^2-c^2=0$;

2) $\frac{x}{4x^2-4x-3} - \frac{x-1}{4x^2-8x+3} = \frac{3x-4}{4x^2-1}$;

3) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{8}{3}$;

4) $(|x+1|-2)^2 = |x+1|-2$;

5) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{x-4}$;

6) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{6-x}$.

2. Dokažite da su rješenja jednadžbe $(x-1)(x-3)+m(x-2)(x-4)=0$ realni i različiti brojevi za svaku vrijednost realnog parametra m.

3. Dokažite da jednadžba $(x-2a)^2-(2x-a)^2 = x-a$ ima realna rješenja bez obzira na to koju vrijednost prima realni broj a.

4. Dana je jednadžba $2x^2-3x-1=0$. Izračunajte: $x_1^2+x_2^2$, $x_1^3+x_2^3$, $x_1^4+x_2^4$.

5. U kvadratnoj jednadžbi $x^2+2x+c=0$ odredite koeficijent c iz svakog od sljedeća dva uvjeta:

1) Jedno rješenje jednadžbe za 2 je veće od drugog.

2) Jedno rješenje jednadžbe dvostruko je veće od drugog.

6. Dana je kvadratna jednadžba: $px-1 = (x-2p)^2$, u kojoj je p realan parametar.

1) Za koje p je zbroj rješenja jednadžbe jednak umnošku njezinih rješenja?

2) Odredite p uz uvjet da je jedno rješenje jednadžbe dvostruko veće od drugog.

3) Za koje p ova jednadžba ima realna rješenja?

7. Dana je kvadratna jednadžba: $m(x-1)^2 = 1-(m-1)x$, gdje je m realan parametar.

1) Za koje m je nula jedno rješenje jednadžbe?

2) Za koje m su rješenja jednadžbe suprotni brojevi?

3) Ako je 3 jedno rješenje jednadžbe, odredite drugo rješenje.

4) Odredite m uz uvjet da jednadžba ima dvostruko rješenje.

8. Dana je kvadratna jednadžba: $2x^2-4x+3=0$. Napišite kvadratnu jednadžbu čija su rješenja recipročna rješenjima zadane jednadžbe.

9. Napišite kvadratnu jednadžbu čije je jedno rješenje zbroj, a drugo umnožak rješenja jednadžbe $3x^2-2x+1=0$.

10. Riješite sustav jednadžbi: $u+v=1$, $u^3+v^3=19$.

11. Skratite razlomak $\frac{8x^2+2x-3}{20x^2+23x+6}$.

12. Dan je polinom drugog stupnja:

$$f(x) = x^2 - x - 2.$$

1) Odredite nultočke ovog polinoma.

2) Za koju vrijednost varijable x ovaj polinom prima najmanju vrijednost i koliko ta vrijednost iznosi?

3) Za koje realne brojeve x polinom prima pozitivne vrijednosti?

4) Nacrtajte graf polinoma f.

13. Dan je polinom drugog stupnja:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4.$$

1) Odredite nultočke ovoga polinoma.
2) Za koji x ova funkcija prima ekstremnu vrijednost? Je li taj ekstrem maksimum ili minimum funkcije? Koliko iznosi?
3) Nacrtajte graf polinoma f.
4) Za koje realne brojeve x polinom prima pozitivne vrijednosti?

14. Odredite polinom drugog stupnja koji za $x = \frac{1}{2}$ prima najmanju vrijednost $y = -\frac{9}{4}$, a $x = -1$ jedna je njegova nultočka. Nacrtajte graf toga polinoma.

15. Broj -1 dvostruki je korijen polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Odredite taj polinom ako je $f(1) = 1$.

16. Odredite nultočke polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(-2) = f(0) = 3$, a najveća vrijednost polinoma je jednaka 4.

17. Pravac $x = -1$ je os simetrije parabole $y = ax^2 + bx + c$. Najniža točka parabole ima ordinatu -3, a parabola prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Odredite jednadžbu parabole.

18. S $f(x) = (p-1)x^2 + px - p$, $p \neq 1$ zadan je skup polinoma drugog stupnja. Za koje se vrijednosti realnog parametra p dobije polinom koji prima negativne vrijednosti za sve $x \in \mathbf{R}$?

19. Odredite sve vrijednosti realnog parametra m za koje su vrijednosti polinoma $f(x) = (m-1)x^2 - (2m+1)x + 3$ veće od 1 za sve $x \in \mathbf{R}$.

20. Odredite koeficijent a tako da polinom $f(x) = (x-a)(ax-1)$ ni za koji a ne prima negativne vrijednosti za svaki realni broj x.

21. Parabola presijeca os y u točki $N(0,2)$ te dira os x u točki $M(1,0)$. Odredite jednadžbu ove parabole.

22. Odredite jednadžbu tangente parabole $y = 2x^2 - x + 1$ u njezinoj točki $T(-1, y)$.

23. Za koje vrijednosti realnog parametra k parabola $y = -x^2 - x$ i pravac $y = k(x+1)$ nemaju zajedničkih točaka?

24. Na parabolu $y = -x^2 - x + 2$ položena je tangenta paralelno pravcu $x - y + 1 = 0$. Odredite koordinate dirališta.

25. Prikažite grafički funkciju $f(x) = (1 - |x|)(1 - x)$. Za koje x ova funkcija prima negativne vrijednosti?

26. Riješite nejednadžbe:
1) $\frac{2x-1}{x^2 - x + 1} < 1$;
2) $\frac{x-1}{x^2 + 3x - 4} \geq 1$.

27. Odredite vrijednost realnog parametra m tako da zbroj kvadrata rješenja jednadžbe $2x^2 - (m+1)x - m - 1 = 0$ prima najmanju moguću vrijednost.

28. Dana je dužina $\overline{AB}$ duljine a. Na toj dužini odabere se točka C te se nad dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ konstruiraju polukrugovi. Za koji će položaj točke C zbroj površina tih polukrugova imati najmanju površinu?

29. U dani kvadrat upišite kvadrat najmanje površine.

7. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Zbroj rješenja jednadžbe $\frac{3x^2}{0.03} + 0.1 = 0$ jednak je:
A. $0.1i$ **B.** 30 **C.** -0.1 **D.** 0

2. Jedno rješenje jednadžbe $(ax-1)(x-a) = 0$ jednako je -1. Drugo rješenje jednadžbe je:
A. -1 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -3

3. Rješenja jednadžbe $\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{4}{x\sqrt{x}}$ su brojevi:
A. $-1 \pm \sqrt{3}$ **B.** 4 i 9 **C.** $1 \pm \sqrt{5}$ **D.** $1 \pm i$

4. Kvadratna jednadžba $x^{-2} - x^{-1} + c = 0$ nema realnih rješenja ako je:
A. $c > -1$ **B.** $c > \frac{1}{4}$ **C.** $c < -1$ **D.** $c < \frac{1}{4}$

5. Kvadratna jednadžba čija su rješenja trostruka rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 8x - 20 = 0$ glasi:
A. $x^2 - 24x - 60 = 0$ **B.** $x^2 - 24x - 180 = 0$
C. $x^2 - 11x - 23 = 0$ **D.** $x^2 - 6x - 90 = 0$

6. Sustav jednadžbi $x + y = a$ i $xy = 4$ nema realnih rješenja ako je:
A. $-2 < a < 2$ **B.** $a < 2$ **C.** $-4 < a < 4$ **D.** $a < -2$ ili $a > 2$

7. Jednakost $4x^2 - 3x - 1 = (ax+b)(cx+d)$, gdje su a, b, c i d cijeli brojevi, jest identitet. Tada je:
A. $abcd = -1$ **B.** $abcd = -2$ **C.** $abcd = -3$ **D.** $abcd = -4$

8. Parabola $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ siječe os x u točkama M i N. Udaljenost $|MN|$ tih točaka jednaka je:
A. 2 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

9. Skup svih vrijednosti polinoma $f(x) = x^2 - 4x + 3$ jest interval:
A. $\langle -\infty, 4]$ **B.** $[-1, +\infty\rangle$ **C.** $\langle -\infty, -1]$ **D.** $[3, +\infty\rangle$

10. Polinom $f(x) = x^2 + bx + c$ prima negativne vrijednosti ako i samo ako je $x \in \langle -11, 5\rangle$. Za funkciju f vrijedi:
A. $f(0) = -55$ **B.** $f(0) = 6$ **C.** $f(0) = 25$ **D.** $f(0) = -5$

Ispit 2

1. Manje rješenje jednadžbe $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}x\right)^2$ je broj:

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{1}{4}$

2. Umnožak realnih rješenja jednadžbe $x^6-7x^3-8=0$ jednak je:

A. -8 **B.** -2 **C.** 7 **D.** 15

3. Brojevi -1 i $-4i$ dva su rješenja bikvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima. To je jednadžba:

A. $x^4-6x^2-5=0$ **B.** $x^4+15x^2-16=0$
C. $x^4+12x^2-13=0$ **D.** $x^4-17x^2+16=0$

4. Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2+mx+1=0$ realni su brojevi za:

A. $m\leq -2$ **B.** $m\geq 2$ **C.** $m\geq 0$ **D.** $m\leq -2$ ili $m\geq 2$

5. Jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2-3x+q=0$ dva puta je veće od drugog. Tada je:

A. $q=-1$ **B.** $q=2$ **C.** $q=-3$ **D.** $q=4$

6. Zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je $\frac{n(n+1)}{2}$. Ako je $1+2+3+\ldots+n=630$. Tada je:

A. $n<30$ **B.** $30<n<36$ **C.** $n>40$ **D.** $n=38$

7. Ako je $a\cdot f(0)<0$ polinom drugog stupnja $f(x)=ax^2+bx+c$:

A. nema realnih nultočaka
B. prima pozitivne vrijednosti za svaki $x\in\mathbf{R}$
C. ima realne nultočke
D. prima negativne vrijednosti za svaki $x\in\mathbf{R}$

8. Tjeme parabole $y=-2x^2+3x+c$ je na osi x. Tada je:

A. $c=\frac{4}{3}$ **B.** $c=-\frac{1}{4}$ **C.** $c=\frac{3}{8}$ **D.** $c=-\frac{9}{8}$

9. Skup svih vrijednosti funkcije $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+4$ za $x\in\langle 0,4\rangle$ pripadaju intervalu:

A. $\left\langle 0,\frac{9}{2}\right\rangle$ **B.** $\langle -\infty,2\rangle$ **C.** $\langle -1,1\rangle$ **D.** $\langle 0,1\rangle$

10. Skup rješenja nejednadžbe $\frac{x-2}{x}>\frac{x}{x+1}$ je skup:

A. $\langle -\infty,0\rangle\cup\langle 1,2\rangle$ **B.** $\langle -\infty,-2\rangle\cup\langle -1,0\rangle$
C. $\langle -\infty,0\rangle$ **D.** $\mathbf{R}$

Ispit 3

1. Veće rješenje jednadžbe $(2x-3)(3x+1)=(4x-6)(x+2)$ je broj:

A. $x=\frac{3}{2}$ **B.** $x=3$ **C.** $x=\frac{5}{2}$ **D.** $x=2$

2. Umnožak svih rješenja jednadžbe $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}+\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=\frac{5}{2}$ jednak je:

A. $\sqrt{3}$ **B.** -1 **C.** -6 **D.** 2

3. Jednadžba $|x|(x+1)=a$ ima točno tri različita rješenja ako je:

A. $0<a<\frac{1}{4}$ **B.** $a<\frac{1}{4}$ **C.** $a>\frac{1}{4}$ **D.** $a>0$

4. Jednadžba $x^2-mx-m+3=0$ nema realnih rješenja ako je:

A. $m<-6$ ili $m>2$ **B.** $m<0$
C. $-6<m<2$ **D.** $m>2$

5. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $2x^2-3x+4=0$, onda je $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ jednako:

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $-\frac{7}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{5}$

6. Dan je polinom $f(x)=ax^2+x+1$. Za svaki realni broj x pritom vrijedi $f(1-x)=f(1+x)$. Umnožak nultočaka funkcije f jednak je:

A. -1 **B.** -2 **C.** -3 **D.** -4

7. Najveća vrijednost funkcije $f(x)=\frac{4}{x^2-2x+3}$ jednaka je:

A. 4 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

8. Skup svih vrijednosti funkcije $f(x)=-x^2-2x+c$ jest interval $\langle -\infty,3\rangle$. Tada je:

A. $c=2$ **B.** $c=-1$ **C.** $c=3$ **D.** $c=-4$

9. Skup rješenja nejednadžbe $\frac{2x-1}{x^2-1}\geq 1$ jest interval:

A. $\langle -1,0]\cup\langle 1,2]$ **B.** $[0,2]$
C. $\langle -\infty,-1\rangle\cup[2,+\infty\rangle$ **D.** $[0,1\rangle$

10. Sve vrijednosti funkcije $f(x)=ax^2+3x-2$ manje su od 1. Tada je:

A. $a<-\frac{3}{4}$ **B.** $a<-\frac{9}{8}$ **C.** $a>-1$ **D.** $a<\frac{9}{8}$

Ispit 4

1. Umnožak rješenja jednadžbe $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{5}{8}$ jednak je:

   A. $-\frac{12}{5}$ **B.** $-\frac{18}{5}$ **C.** $-\frac{21}{5}$ **D.** 3

2. Zbroj svih rješenja jednadžbe $x^2-\sqrt{x^2}=12$ jednak je:

   A. 0 **B.** -2 **C.** 3 **D.** 1

3. Ako je broj $x_1=1-2\sqrt{2}$ jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2+bx+c=0$ s racionalnim koeficijentima, tada je:

   A. $c=11$ **B.** $c=-7$ **C.** $c=15$ **D.** $c=-12$

4. Ako je $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10$ i $\sqrt{x^2-y^2}=9$, onda je:

   A. $x=9$ **B.** $x=20$ **C.** $x=99$ **D.** $x=41$

5. Jednadžba čija su rješenja recipročna rješenjima jednadžbe $2x^2-3x+5=0$ jest jednadžba:

   A. $5x^2+2x+3=0$ **B.** $5x^2-3x+2=0$
   C. $3x^2+2x-5=0$ **D.** $2x^2-5x+3=0$

6. Udaljenost tjemena parabola $y=x^2+x+\frac{1}{4}$ i $y=x^2-2x+1$ jednaka je:

   A. $-\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{3}{2}$

7. Skup svih vrijednosti funkcije $f(x)=x^2-2x+c$ jest interval $[3,+\infty\rangle$. Tada je:

   A. $c=2$ **B.** $c=1$ **C.** $c=3$ **D.** $c=4$

8. Ako je $f(-1)=3, f(2)=3$, najveća vrijednost funkcije $f(x)=-x^2+bx+c$ jednaka je:

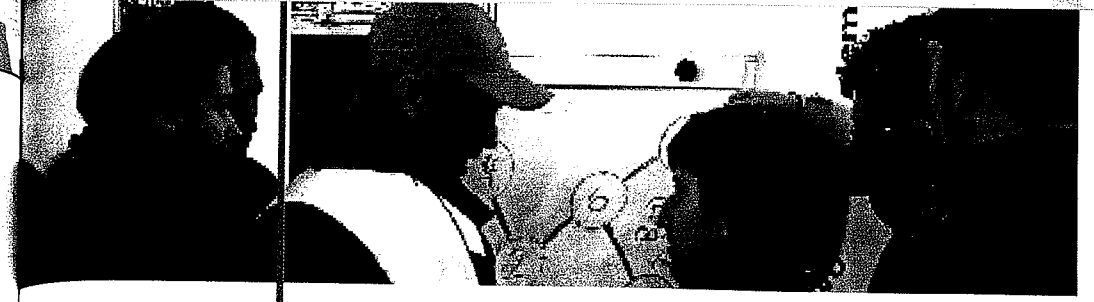
   A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{21}{4}$ **C.** $-\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{9}{4}$

9. Tjeme parabole koja je simetrična paraboli $y=x^2-4x+3$ s obzirom na ishodište koordinatnog sustava je točka:

   A. $T(1,-2)$ **B.** $T(2,-1)$ **C.** $T(-2,1)$ **D.** $T(-1,2)$

10. Površina trokuta čiji su vrhovi sjecišta parabole $y=-x^2+x+6$ s koordinatnim osima jednaka je:

    A. $P=10$ kv. jed. **B.** $P=8$ kv. jed. **C.** $P=15$ kv. jed. **D.** $P=12$ kv. jed.



8. lekcija

Eksponencijalne i logaritamske funkcije

8. lekcija Ponovimo

Eksponencijalna funkcija

Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f(x) = a^x$ zove se **eksponencijalna funkcija**. Sve su vrijednosti eksponencijalne funkcije pozitivni realni brojevi i funkcija je definirana za svaki realan broj x.

Vrijede sljedeća svojstva:

$$a^0 = 1,\ a^1 = a$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

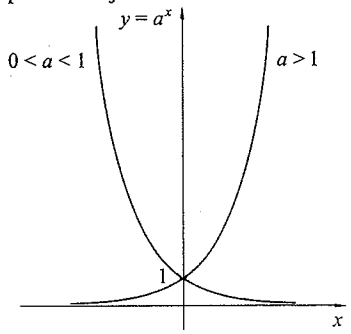
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y},$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},$$

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x.$$

Graf svake eksponencijalne funkcije siječe os y u točki $(0, 1)$. Grafovi eksponencijalnih funkcija čije su baze recipročni brojevi simetrični su s obzirom na os y.



Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$ → funkcija je rastuća.

Ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$ → funkcija je padajuća.

Svojstvo injektivnosti eksponencijalne funkcije.

Ako je $a^{x_1} = a^{x_2}$, onda vrijedi $x_1 = x_2$.

Logaritamska funkcija

Logaritam pozitivnog broja y jest eksponent kojim treba potencirati bazu a da bi se dobilo y:

$$a^{\log_a y} = y.$$

Logaritamska funkcija po bazi a je pridruživanje $x \mapsto \log_a x$, kojim se pozitivnom realnom broju x pridružuje njegov logaritam. Pišemo:

$$f(x) = \log_a x.$$

Sve su vrijednosti logaritamske funkcije realni brojevi i definirana je za sve pozitivne realne brojeve.

Logaritamska funkcija je inverz eksponencijalne funkcije. Znači,

ako je $f(x) = a^x$ eksponencijalna funkcija i y pozitivan broj, tada:

$$a^x = y \iff x = \log_a y.$$

Vrijede sljedeća svojstva:

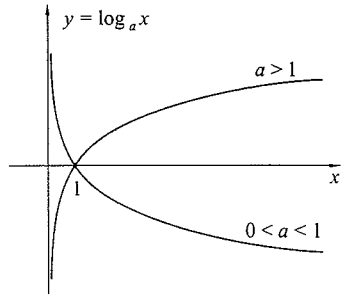
$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x, \quad \log_{a^r} x = \frac{1}{r} \cdot \log_a x.$$

Graf logaritamske funkcije siječe os x u točki $(1, 0)$. Os y je vertikalna asimptota funkcije.



Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 < \log_a x_2$ → funkcija je rastuća.

Ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 > \log_a x_2$ → funkcija je padajuća.

Svojstvo injektivnosti logaritamske funkcije

Ako je $\log_a x_1 = \log_a x_2$, onda vrijedi $x_1 = x_2$.

Veza logaritama po različitim bazama

Ako je $a > 0$ i $a \neq 1$ te x bilo koji pozitivan broj, tada vrijedi sljedeći identitet:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Dekadski logaritam

Logaritam po bazi 10 zovemo **dekadskim logaritmom** ili jednostavno logaritmom.

$$10^x = y \iff x = \log y.$$

Prirodni logaritam

U primjeni logaritamskih funkcija najvažnija je ona čija je baza broj e. Ta funkcija ima i posebno ime, **prirodni logaritam**, i posebnu oznaku $\ln x$:

$$\log_e x = \ln x.$$

Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe

Jednadžba oblika:

$$a^x = b,\ a > 0$$

zove se **eksponencijalna jednadžba**. Za $b > 0$ ona ima jednoznačno rješenje, za $b \leqslant 0$ jednadžba nema rješenja.

Eksponencijalne jednadžbe rješavamo tako da se logaritmiranjem svede na oblik $a^x = a^{\log_a b}$ pa je njezino rješenje $x = \log_a b$. Ako su obje baze cjelobrojne potencije istoga broja, tada jednostavno koristimo svojstvo injektivnosti eksponencijalne funkcije. Neke se jednadžbe zamjenom $u = a^x$ svode na algebarske.

Jednadžba oblika:

$$\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbf{R}$$

zove se **logaritamska jednadžba**. Njezino jednoznačno rješenje je broj $x = a^b$.

Logaritamske jednadžbe rješavamo tako da ih svodimo na algebarske, i to potenciranjem, korištenjem svojstava logaritamskih funkcija, zamjenama ili na druge načine. Pritom treba paziti da jednadžbu ima smisla promatrati samo tamo gdje su funkcije definirane.

Eksponencijalne i logaritamske nejednadžbe

Eksponencijalna nejednadžba je nejednadžba čiji je osnovni oblik:

$$a^x > b,\ a > 0.$$

Pri rješavanju eksponencijalne nejednadžbe $a^x > b$, nejednadžbu svodimo na oblik:

$$a^x > a^{\log_a b}.$$

Ako je $a > 1$, rješenje nejednadžbe je $x > \log_a b$.

Ako je $0 < a < 1$, rješenje nejednadžbe je $x < \log_a b$.

Logaritamska nejednadžba je nejednadžba čiji je osnovni oblik:

$$\log_a x > b,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Pri rješavanju logaritamske nejednadžbe nejednadžbu svodimo na oblik:

$$\log_a x > \log_a a^b.$$

Ako je $a > 1$, rješenje je $x > a^b$.

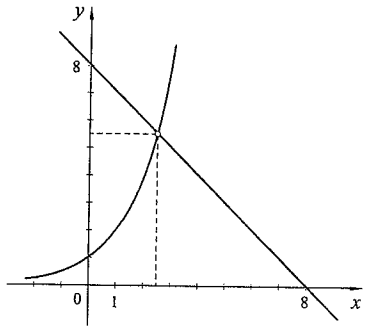
Ako je $0 < a < 1$, rješenje je $0 < x < a^b$.

8. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Odredimo interval $\langle n, n+1\rangle$, $n \in \mathbf{N}$, unutar kojeg je rješenje jednadžbe $2^x = 8 - x$.

Rješenje. Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove eksponencijalne funkcije $f(x) = 2^x$ i linearne funkcije $g(x) = -x + 8$.



Sa slike možemo procijeniti kako je rješenje ove jednadžbe broj između 2 i 3.

No, to možemo potvrditi na sljedeći način: za $x = 2$ je $f(2) = 4$, a $g(2) = 6$.

Dakle, $f(2) < g(2)$.

Za $x = 3$ je $f(3) = 8$, a $g(3) = 5$. Vidimo da je $f(3) > g(3)$. Kako su obje funkcije, i f i g, monotone, njihovi se grafovi sijeku u nekoj točki nad intervalom $\langle 2, 3\rangle$.

No, onda je unutar toga intervala i rješenje jednadžbe $2^x = 8 - x$.

Primjer 2.

Broj bakterije na nekoj kulturi utrostruči se svaka četiri sata. Ako je na početku promatranja bilo 1000 bakterija, koliko će ih biti nakon dva dana?

Rješenje. Neka je n_0 broj bakterija na početku promatranja. Tada će broj bakterija nakon t sati biti jednak $f(t) = n_0 \cdot 3^{\frac{1}{4}t}$. Ova funkcija je rastuća eksponencijalna funkcija.

Dva dana su 48 sati te je $f(48) = 1\,000 \cdot 3^{12} = 531\,441\,000$.

Zaključujemo da će nakon dva dana na kulturi biti 531 441 000 bakterija.

Primjer 3.

Nedugo nakon uzimanja aspirina, u krvi bolesnika bilo je 300 miligrama tog lijeka. Ako se količina lijeka u krvi smanjuje tako da je svaka dva sata upola manja, koliko će aspirina biti u krvi bolesnika nakon 5 sati?

Rješenje. Smanjivanje količine aspirina u krvi jest eksponencijalna funkcija koju možemo zapisati u obliku $f(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$, gdje je m_0 masa aspirina u krvi na početku, a $f(t)$ količina lijeka nakon vremena t.

I sada računamo: $f(5) = 300 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$ miligrama. Nakon 5 sati u krvi bolesnika bit će oko 53 mg aspirina.

Primjer 4.

Odredimo nepoznanicu x u svakoj od tri sljedeće jednakosti:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{2}$; **2)** $\log_x 16 = \frac{4}{3}$; **3)** $\log_8 \sqrt[3]{16} = x$.

Rješenje. Zadatak rješavamo izravno primjenjujući definiciju logaritma:

$$\log_a b = c \iff a^c = b.$$

1) Iz $\log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{2}$ slijedi $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

2) Jednakost $\log_x 16 = \frac{4}{3}$ možemo zapisati kao $x^{\frac{4}{3}} = 16 = 2^4 = 8^{\frac{4}{3}}$. Tako je onda $x = 8$.

3) Jednakosti $\log_8 \sqrt[3]{16} = x$ ekvivalentna je jednakost $8^x = \sqrt[3]{16}$. Nju možemo zapisati kao jednakost potencija istih baza, $2^{3x} = 2^{\frac{4}{3}}$. Dakle: $3x = \frac{4}{3}$, pa je $x = \frac{4}{9}$.

Primjer 5.

Izračunajmo:

1) $4^{-\log_2 7}$; **2)** $5^{2+\log_{25} 9}$; **3)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\sqrt{3}} 12 + 3\log_9 4}$.

Rješenje. Rješavamo zadatak primjenjujući svojstva potencija i jednakost $a^{\log_a b} = b$, koja vrijedi za svaki pozitivan broj b.

1) Imamo redom:

$$4^{-\log_2 7} = 2^{-2\log_2 7} = (2^{\log_2 7})^{-2} = 7^{-2} = \frac{1}{49}.$$

2) I ovaj zadatak rješavamo na sličan način:

$$5^{2+\log_{25} 9} = 5^2 \cdot 5^{\log_{25} 9} = 25 \cdot 25^{\frac{1}{2}\log_{25} 9} = 25 \cdot (25^{\log_{25} 9})^{\frac{1}{2}} = 25 \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 25 \cdot 3 = 75.$$

3) Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\sqrt{3}} 12+3\log_9 4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\sqrt{3}} 12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3\log_9 4} = \left(\sqrt{3}\right)^{2\log_{\sqrt{3}} 12} \cdot 3^{-3\log_9 4}$$
$$= \left((\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 12}\right)^2 \cdot 9^{-\frac{3}{2}\log_9 4} = 12^2 \cdot (9^{\log_9 4})^{-\frac{3}{2}} = 12^2 \cdot 4^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 144 \cdot \frac{1}{8} = 18.$$

Primjer 6.

Koliko znamenki ima broj 3^{33}? Uzmimo da je $\log 3 = 0.477$.

Rješenje. Džepnim ćemo računalom lako izračunati vrijednost ove potencije.

Dobije se $3^{33} \approx 5.559 \cdot 10^{15}$ i vidi se da je to broj koji ima 16 znamenki.

No, zadatak možemo riješiti i na ovaj način.

Označimo $n = 3^{33}$. Tada je $\log n = 33 \cdot \log 3 = 33 \cdot 0.477 = 15.741$. To znači da je $10^{15} < n < 10^{16}$, odnosno n ima 16 znamenki.

Primjer 7.

Izračunajmo vrijednost brojevnog izraza: $\dfrac{\log_{\sqrt{5}} 45 + 4 \cdot \log_{25} 0.2}{\log_5 27 + 2\log_{0.2} 3}$.

Rješenje. Sve članove i u brojniku i u nazivniku ovog razlomka zapisat ćemo kao logaritme s bazom 5 koristeći se pritom identitetom $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$. Tako dobijemo:

$$\frac{\log_{\sqrt{5}} 45 + 4 \cdot \log_{25} 0.2}{\log_5 27 + 2\log_{0.2} 3} = \frac{2\log_5 45 - 2\log_5 5}{\log_5 27 - 2\log_5 3} = \frac{2\log_5 \frac{45}{5}}{\log_5 \frac{27}{9}} = \frac{2\log 9}{\log 3} = 4.$$

Primjer 8.

Ako je $\log_3 2 = m$, koliko je $\log_{18} 36$?

Rješenje. Uz primjenu istog identiteta kao i u prethodnom zadatku, te ostalih svojstava logaritamske funkcije, računamo kako slijedi:

$$\log_{18} 36 = \frac{\log_3 36}{\log_3 18} = \frac{\log_3 9 + \log_3 4}{\log_3 9 + \log_3 2} = \frac{2 + 2\log_3 2}{2 + \log_3 2} = \frac{2(m+1)}{m+2}.$$

Primjer 9.

Nakon što je ispio nekoliko čašica, u krvi vozača bilo je 0.2 mg/ dl alkohola. Ako se količina alkohola u krvi umanjuje eksponencijalno, tako da se svakog sata umanji za $\frac{1}{4}$, za koje će vrijeme u krvi vozača biti 0.08 mg/ dl alkohola?

Rješenje. Označimo s $x_0 = 0.2$. Nakon jednog sata u krvi vozača bit će:

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{4}x_0 = \frac{3}{4}x_0 \text{ alkohola.}$$

Nakon drugog sata u njegovoj će krvi biti $x_2 = x_1 - \frac{1}{4}x_1 = \frac{3}{4}x_1 = \frac{9}{16}x_0$.

I dalje, nakon trećeg sata, u krvi vozača će biti $x_3 = x_2 - \frac{1}{4}x_2 = \frac{3}{4}x_2 = \frac{27}{64}$ mg/ dl alkohola.

Nastavljamo na jednak način i zaključujemo: Nakon t sati u krvi vozača bit će $f(t) = x_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$ miligrama alkohola u jednom decilitru krvi.

I sada postavljamo jednakost: $0.2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t = 0.08$. Slijedi: $\left(\frac{3}{4}\right)^t = 0.4$. Primjenom svojstava logaritamske funkcije, odatle je $t \cdot \log 0.75 = \log 0.4$, odnosno $t = \dfrac{\log 0.4}{\log 0.75} \approx 3.185$ sati.

U krvi vozača količina alkohola smanjit će se od 0.2 mg/ dl na 0.08 mg/ dl za 3 sata i 11 minuta.

Primjer 10.

Intenzitet potresa mjeri se stupnjevima Richterove skale. Skala je utemeljena na formuli $R = \frac{2}{3}(\log E - 4.4)$, gdje je E količina pri potresu oslobođene energije mjerena u Joulima.

U San Franciscu je 1906. registriran potres jačine 8.2 po Richteru. Kolika je bila količina oslobođene energije?

U istom je gradu 1989. registriran potres jačine 7.1 po Richteru. Usporedi ta dva potresa po količini oslobođene energije.

Rješenje. Najprije računamo energiju E_1 oslobođenu pri prvom potresu.

Iz $8.2 = \frac{2}{3} \cdot (\log E_1 - 4.4)$ dobit ćemo $\log E_1 = \dfrac{8.2 \cdot 3}{2} + 4.4 = 16.7$.

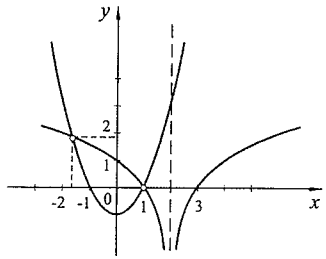
Analogno je $\log E_2 = \dfrac{7.1 \cdot 3}{2} + 4.4 = 15.05$.

Slijedi: $E_1 = 10^{16.7}$; $E_2 = 10^{15.05}$, pa je: $\frac{E_1}{E_2} = 10^{16.7-15.05} = 10^{1.65} \approx 44.7$, što znači da je pri prvom potresu oslobođena više od 44 puta veća energija.

Primjer 11.

Koliko rješenja ima jednadžba $\log_2 |x-2| = x^2 - 1$?

Rješenje.



Na jednoj slici, u istom koordinatnom sustavu, nacrtajmo grafove funkcija s dviju strana dane jednadžbe i zatim prebrojimo sjecišta tih grafova. Dobiveni broj je broj rješenja jednadžbe.

Neka je $f(x) = \log_2 |x-2|$, $g(x) = x^2 - 1$.

Za $x > 2$ je $f(x) = \log_2(x-2)$, a za $x < 2$ je $f(x) = \log_2(2-x)$.

Graf funkcije f simetričan je prema pravcu $x = 2$.

Graf funkcije g je parabola s nultočkama -1 i 1 te s tjemenom u točki $(0,-1)$.

Sa slike vidimo da dana jednadžba ima dva rješenja. Jedno je očito $x = 1$ i to je jednostavno provjeriti.

Drugo je rješenje u intervalu $\langle -2,-1\rangle$. Za $x = -1$ je $f(-1) = \log_2 3 > 0$, a $g(-1) = 0$. A za $x = -2$ je $f(-2) = 2$, a $g(-2) = 3$. Kako su na intervalu $\langle -2,-1\rangle$ obje funkcije i f i g monotono padajuće, onda se nad tim intervalom njihovi grafovi sijeku pa je i rješenje jednadžbe broj iz tog intervala.

Primjer 12.

Riješimo jednadžbu: $27^{2-x} \cdot \sqrt[3]{9^{2x+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$.

Rješenje. Uočavamo kako u ovoj jednadžbi imamo potencije s bazama 27, 9 i $\frac{1}{3}$, a one se sve mogu zapisati kao potencije s bazom 3. Tako ćemo dobiti:

$$3^{6-3x} \cdot 3^{\frac{2(2x+1)}{3}} = 3^{-x+4}.$$

S lijeve strane jednadžbe pomnožit ćemo potencije pa ćemo dobiti:

$$3^{6-3x+\frac{2(2x+1)}{3}} = 3^{-x+4}.$$

I sada možemo izjednačiti eksponente. Tako dobijemo linearnu jednadžbu:

$$6 - 3x + \frac{2(2x+1)}{3} = -x + 4.$$

Njezino rješenje $x = 4$ je i rješenje zadane eksponencijalne jednadžbe.

Primjer 13.

Riješimo jednadžbu: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 11$.

Rješenje. S lijeve je strane zbroj triju potencija s bazom 2. One nemaju jednake eksponente pa ih moramo zapisati kao potencije s jednakim eksponentom, a to će biti $x-1$.

$$2^{x-1} + 2 \cdot 2^{x-1} + 4 \cdot 2^{x-1} = 11.$$

Slijedi $7 \cdot 2^{x-1} = 11$, a odatle je $2^{x-1} = \frac{11}{7}$.

Posljednju jednakost prema definiciji logaritma zapišemo u obliku $x - 1 = \log_2 \frac{11}{7} \approx 0.652$, onda je $x \approx 1.652$.

Primjer 14.

Riješimo jednadžbu: $5^x + 5 = 6 \cdot (\sqrt{5})^x$.

Rješenje. Uočimo kako je riječ o kvadratnoj jednadžbi s nepoznanicom $(\sqrt{5})^x$.

Možemo je zapisati u obliku $(\sqrt{5})^{2x} - 6 \cdot (\sqrt{5})^x + 5 = 0$.

Rješenja ove jednadžbe su $(\sqrt{5})^x = 1$ i $(\sqrt{5})^x = 5$.

Odatle se dobije $x = 0$ ili $x = 2$.

Primjer 15.

Riješimo jednadžbu: $\log(0.1x^2) \cdot \log \frac{x}{10} = 3$.

Rješenje. Ako postoji, rješenje ove jednadžbe mora biti pozitivan broj. To je zbog toga jer u suprotnom broj $\log \frac{x}{10}$ nije definiran.

Koristeći se svojstvima logaritamske funkcije jednadžbu prevodimo u sljedeći oblik:

$$(\log 0.1 + 2\log x)(\log x - \log 10) = 3.$$

Dalje imamo: $(-1 + 2\log x)(\log x - 1) = 3$, i konačno: $2\log^2 x - 3\log x - 2 = 0$.

Ovo je kvadratna jednadžba s nepoznanicom $\log x$. Njezina su rješenja $\log x = 2$ i $\log x = -\frac{1}{2}$. Odatle dobijemo rješenja zadane jednadžbe, $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Primjer 16.

Riješimo jednadžbu: $\log_2(2^x - 3) = 2 - x$.

Rješenje. Prema definiciji logaritma iz dane jednadžbe slijedi $2^{2-x} = 2^x - 3$. Ovo je eksponencijalna jednadžba koju nakon množenja s 2^x i sređivanja možemo zapisati u obliku $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

Zamjenom $2^x = u$ dobijemo kvadratnu jednadžbu $u^2 - 3u - 4 = 0$ s rješenjima $u = 4$ i $u = -1$.

Iz $u = 4 = 2^x$ slijedi $x = 2$, dočim $u = 2^x = -1$ ne daje rješenja, jer su vrijednosti eksponencijalne funkcije $f(x) = 2^x$ samo pozitivni realni brojevi.

Primjer 17.

Riješimo sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3^{x-2} \cdot 2^{y-4} = 144, \\ 1 + \log_2 x = \log_2 y. \end{cases}$

Rješenje. Iz druge jednadžbe sustava slijedi $\log_2 y - \log_2 x = 1$, ili $\log_2 \frac{y}{x} = 1$. Odatle je $y = 2x$.

Uvrstimo to u prvu jednadžbu pa imamo:

$$3^{x-2} \cdot 2^{2x-4} = 3^{x-2} \cdot 4^{x-2} = 12^{x-2} = 144.$$

Dakle, $x = 4$. Zatim iz $y = 2x$ dobijemo $y = 8$.

Primjer 18.

Riješimo nejednadžbu: $0.8^{2x-3} \leq \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1}$.

Rješenje. Uočavamo s lijeve i s desne strane nejednadžbe potencije s istom bazom. Zato nejednadžbu zapišemo u obliku $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-3} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{2}(x+1)}$.

Kako je ovdje baza eksponencijalne funkcije broj manji od 1, ta je funkcija padajuća. Drugim riječima, ako je pozitivan broj manji od 1, što ga potenciramo većim brojem vrijednost će mu padati.

Zbog toga iz posljednje nejednakosti slijedi $2x - 3 \geq -\frac{1}{2}(x + 1)$. Rješenje ove jednostavne linearne nejednadžbe je svaki x, $x \geq 1$.

Primjer 19.

Riješimo nejednadžbu: $0.4^x - 2.5^{x+1} > 1.5$.

Rješenje. Zapišimo nejednadžbu u obliku $\left(\frac{2}{5}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x > \frac{3}{2}$. Uvedemo li zamjenu $\left(\frac{2}{5}\right)^x = u$, tada će nejednadžba primiti oblik $2u - \frac{5}{u} - 3 > 0$. Kako je $u > 0$ (eksponencijalna funkcija prima samo pozitivne vrijednosti) onda posljednju nejednadžbu možemo pomnožiti s u. Tako ćemo dobiti kvadratnu nejednadžbu $2u^2 - 3u - 5 > 0$, čija je rješenje $u < -1$ ili $u > \frac{5}{2}$. Znači da je $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -1$ ili je $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \frac{5}{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

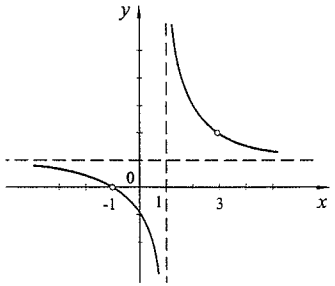
Prvi dio rješenja otpada (Zašto?). Iz $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ pa je $x < -1$. To je i rješenje danog zadatka.

Primjer 20.

Riješimo nejednadžbu: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} > -1$.

Rješenje. Primijetimo da je logaritamska funkcija čija je baza broj između 0 i 1 padajuća. Zbog toga je zadana nejednadžba ekvivalentna sustavu nejednadžbi $0 < \frac{x+1}{x-1} < 2$.

Rješenje tog sustava je svaki realni broj $x < -1$ ili $x > 3$. Ti su brojevi ujedno i rješenja zadane nejednadžbe.



8. lekcija Zadaci

1. Dana je eksponencijalna funkcija $f(x) = -2 \cdot e^{-x}$. Poredajte, bez uporabe kalkulatora, po veličini brojeve: $f(-1.1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(-0.5)$, $f(1)$.

2. Ako je $c(t) = 3.5 \cdot e^{-\frac{1}{t}}$, koliko je $c(3.5)$?

3. Ako je $f(t) = \dfrac{50}{1+e^{-t}}$, odredite t za koji je $f(t) = 4$.

4. Ako je $f(t) = 100 \cdot 1.04^{2t}$, za koji t je $f(t) = 300$?

5. Odredite skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = 2^{x-1} - 3$.

6. Brzina kojom slobodno pada padobranac nakon vremena t sekundi u metrima jednaka je $v(t) = 24.4(1 - e^{-0.2t})$. Kojom brzinom pada padobranac nakon 4.5 sekunde?

7. Iz $n = 1\,000(1 - e^{-kt})$ izrazite k.

8. Kompjutorski virus za t sati zarazi n računala, pri čemu je $n(t) = 1000 \cdot e^{3.5t}$. Koliko računala zarazi virus za 1 sat i 45 minuta?

9. Odredite x u svakoj od sljedećih jednakosti:

1) $\log_x 27 = -\dfrac{3}{4}$;

2) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{8} = x$;

3) $\log_{0.2} x = -3$.

10. Izračunajte:

$$\log_{0.25} \log_{\sqrt{5}} 25 + \log_8 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

11. Izračunajte:

1) $27^{1-\log_9 16}$; **2)** $8^{\log_{\sqrt{2}} 3 - \log_4 9}$.

12. Izračunajte:

$$\log_{\sqrt{5}}(15 \cdot \sqrt[4]{125} \cdot 3^{-\log_{\sqrt{3}} 5 - 1}).$$

13. Izračunajte vrijednost funkcije: $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$ za $x = 3^{\log_9(3-2\sqrt{2})}$.

14. Bez uporabe kalkulatora izračunajte: $\log_2 2.5 + 2\log_{0.5} 25 + \log_2 250$.

15. Ako je $\log 2 = 0.301$, koliko je: $\log 4 + \log \dfrac{1}{2} - \log \sqrt{2}$?

16. Ako je $\log x = -1 - \log a - \log b$, odredite x.

17. Ako je $\log x = 2 - \log(a-b) - \log(a+b)$, odredite x.

18. Ako je $\log_6 2 = m$, koliko je $\log_6 9$?

19. Ako je $\log 64 = p$, koliko je $\log \sqrt[3]{25}$?

20. Ako je $\log 5 = a$, $\log 3 = b$, koliko je $\log_{30} 8$?

21. Uranij 235 koristi se kao gorivo za neke nuklearne reaktore, ali i kao fisijski materijal u atomskim bombama. Vrijeme poluraspada mu je 710 milijuna godina. Nakon koliko će vremena od 10 grama uranija 235 raspadanjem ostati 1 gram?

22. Stupanj glasnoće D nekog TV-aparata izražen u decibelima opada s udaljenošću d od izvora zvuka prema zakonu $D = 10 \cdot \log \dfrac{10^7}{3d^2}$. Udaljenost d izražena je u centimetrima. Kako daleko mora biti gledatelj tako da stupanj glasnoće bude jednak nuli?

Riješite jednadžbe:

23. $4^{x-1.5} \cdot \sqrt{2^{2x-3}} = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{-x}$;

24. $2^x - 2^{x-1} - 2^{x-2} = 8$;

25. $27^{1-\frac{x}{3}} + 9^{1-0.5x} + 3^{2-x} = 135$;

26. $5^{x+1} + 3^{x-1} = 5^{x-1} + 3^{x+1}$;

27. $2^{|x-1|} = 16 \cdot 4^{-0.5}$;

28. $2^{x-1} \cdot 3^{x+1} - 6^x = \dfrac{1}{2}$;

29. $10 \cdot 10^{2x} - 11 \cdot 10^x + 1 = 0$;

30. $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;

31. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^{1-x} = 2$;

32. $4^x - 5 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$.

Riješite sljedeće logaritamske jednadžbe:

33. $\log_2 x - \log_2(x+1) = 1 - \log_2 3$;

34. $\dfrac{\log(2x-1)}{\log(x^2+5)} = \dfrac{1}{2}$;

35. $\log^2 x + 2\log(0.1x) = 1$;

36. $\log(0.1x^2) \cdot \log \dfrac{10}{x} = -3$;

37. $2\log_3^2(x-1) - \log_3(x-1)^2 = 4$;

38. $\log_8(1 - \log_3(x-1)) = \dfrac{1}{3}$;

39. $\log_{25}[1 - 6\log_8(1 - 3\log_9 x)] = \dfrac{1}{2}$;

40. $\log_5(5^x - 24) = 2 - x$.

41. Riješite sustave jednadžbi:

1) $\begin{cases} 3^{x-2} \cdot 2^y = 54, \\ \log_2(x-y) = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^x + y = 5, \\ x - 2 = \log_2 y. \end{cases}$

Riješite nejednadžbe:

42. $5^x - 5^{x-1} < 20$;

43. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{x-1} \cdot 0.8^{x+1} \geq \dfrac{25}{16}$;

44. $0.4^x - 2.5^{x+1} > 1.5$;

45. $\dfrac{2^{x-1}+1}{2^{x+1}-1} > \dfrac{1}{2}$;

46. $\dfrac{1}{1+\log x} + \dfrac{1}{1-\log x} > 2$;

47. $\log_2(1 - 2\log_9 x) > 1$;

48. $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-1}{2x+3} < 0$;

49. $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$;

50. $\log_2(2^x - 3) < 2 - x$;

51. $\dfrac{-x^2-2x+3}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3)} \leqslant 0$;

52. $\dfrac{\log_3(2-x)}{-x^2+x-1} \geq 0$.

8. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Ako je $4^x + 4^{-x} = 34$, onda je $2^x + 2^{-x}$ jednako:
   A. 4 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 9

2. Približna vrijednost brojevnog izraza $\log_2 \log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ jednaka je:
   A. -0.09 **B.** 1 **C.** 1.5 **D.** -0.19

3. Rješenje jednadžbe $\log_2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ pripada intervalu:
   A. $\langle -1, 2\rangle$ **B.** $\langle 0, 1\rangle$ **C.** $\langle 1, 2\rangle$ **D.** $\langle 2, 3\rangle$

4. Poredajte po veličini, od najmanjeg prema najvećem, brojeve: $a = \log_{0.1} 0.01$, $b = \log 0.1$, $c = \log_{0.1} 1$, $d = \log_{0.1} 0.1$.
   A. $a < b < c < d$ **B.** $b < c < a < d$
   C. $c < d < a < b$ **D.** $b < c < d < a$

5. Ako je $\log_a c = \frac{1}{2}$, $\log_b c = \frac{1}{3}$, onda je $\log_c \frac{a\sqrt{b}}{c^2}$ jednako:
   A. -1 **B.** -0.5 **C.** 1.5 **D.** 2

6. Koliko je $\log \sqrt[9]{5}$ ako je $a = \log 8$?
   A. $\frac{a-3}{9}$ **B.** $\frac{3-a}{27}$ **C.** $\frac{3}{1-a}$ **D.** $\frac{a-1}{3-a}$

7. Za sve $x > 1$, nakon kraćenja, razlomak $\frac{\log^2(x-1)}{\log(x-1)^2}$ prima oblik:
   A. $x - 1$ **B.** $\log \sqrt{x-1}$ **C.** 1 **D.** $\log(x-1)$

8. Ako je $y = \ln \frac{x-1}{x+1}$, onda je:
   A. $x = \ln \frac{y-1}{y+1}$ **B.** $x = \frac{e^y + 1}{e^y - 1}$ **C.** $x = \frac{e^y + 1}{1 - e^y}$ **D.** $x = \ln \frac{e^y}{1 - e^y}$

9. Rješenje jednadžbe $2^{1-\log_4 x} = 5$ pripada intervalu:
   A. $\langle -0.5, 0\rangle$ **B.** $\langle 0, 0.5\rangle$ **C.** $\langle 0.5, 1\rangle$ **D.** $\langle 1, 2\rangle$

10. Zbroj rješenja jednadžbe $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$ približno je jednak:
    A. 1.42 **B.** 2.42 **C.** 3.42 **D.** 4.42

Ispit 2

1. Vrijednost brojevnog izraza $8^{\log_4 9} \cdot \log_{0.5} \sqrt[3]{4}$ jednaka je:
   A. 12 **B.** -8 **C.** -18 **D.** 15

2. Posljednja znamenka broja x za koji vrijedi $\log_2 \log_3 \log_4 x = 2$:
   A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

3. Odredite dva uzastopna cijela broja kojima je određen interval kojem pripada rješenje jednadžbe $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 3$.
   A. $\langle 2, 3\rangle$ **B.** $\langle 1, 2\rangle$ **C.** $\langle 0, 1\rangle$ **D.** $\langle -1, 0\rangle$

4. Vrijednost brojevnog izraza $\frac{\log_2 5 - 2\log_4 25}{1 - \log_8 40}$ jednaka je:
   A. 3 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 6

5. Poredajte po veličini brojeve $a = \log_9 3$, $b = \log_2 \sqrt[3]{16}$, $c = \log_5(5\sqrt{5})$, $d = \log(0.01)^{-2}$.
   A. $a < c < b < d$ **B.** $b < c < a < d$
   C. $a < b < c < d$ **D.** $b < a < c < d$

6. Za svaka tri pozitivna broja a, b, i c $\log_{a^2} b \cdot \log_{b^2} c \cdot \log_{c^2} a$ jednako je:
   A. abc **B.** 1 **C.** 0 **D.** 0.125

7. Ako je $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, onda je:
   A. $x = \ln \frac{1}{y^2 - 1}$ **B.** $x = \ln \frac{y-1}{y+1}$ **C.** $x = \ln \frac{y+1}{y-1}$ **D.** $x = \ln \frac{y}{1-y}$

8. Rješenje jednadžbe $0.5^{3-2x} + 3 \cdot 0.25^{1-x} = 10$ pripada intervalu:
   A. $\langle 0.5, 1.5\rangle$ **B.** $\langle 1.5, 2.5\rangle$ **C.** $\langle 2.5, 3.5\rangle$ **D.** $\langle 3.5, 4.5\rangle$

9. Rješenje sustava jednadžbi $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \end{cases}$ jest uređeni par (x, y) te je:
   A. $x + y = 6$ **B.** $x + y = 4$ **C.** $x + y = 7$ **D.** $x + y = 5$

10. Rješenje nejednadže $\frac{\log(x-1)^2}{x^2 - 2x + 3} \leq 0$ je svaki realni broj x iz intervala:
    A. $[1, +\infty\rangle$ **B.** $[0, 1]$ **C.** $[0, 1\rangle \cup \langle 1, 2]$ **D.** $\langle -\infty, 1]$

Ispit 3

1. Ako je $f(x) = 2.7 \cdot e^{-0.45x} - 1$, onda je $f(3)$:
   A. ≈ -0.3 **B.** ≈ 1.2 **C.** ≈ 0.3 **D.** ≈ -3.3

2. Vrijednost brojevnog izraza $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ jednaka je:
   A. $x = \log 8$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = \log 3$ **D.** $x = 8$

3. $\dfrac{1 - \log^2 5}{\log 50} =$
   A. $\log 2$ **B.** $\log 4$ **C.** 1 **D.** $\log 5$

4. Ako je $\log 2 = a$, onda je $\log 40$ jednako:
   A. $1 - 2a$ **B.** $2 + a$ **C.** $1 + 2a$ **D.** $2 - a$

5. Ako je $\log_a c = 4$, $\log_b a = \dfrac{1}{3}$, onda je $\log_c \dfrac{ab^2}{\sqrt{c}}$ jednako:
   A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{3}{4}$ **C.** $\dfrac{5}{4}$ **D.** $\dfrac{7}{4}$

6. Rješenje jednadžbe $4^{2-\log_2(x-1)} = 0.01$ jest:
   A. $x = 51$ **B.** $x = 41$ **C.** $x = 31$ **D.** $x = 21$

7. Rješenje jednadžbe je broj $\log_2 \sqrt{x-4} + \log_2 \sqrt{2x-1} = \log_2 3$. Taj je broj:
   A. djeljiv sa 2 **B.** djeljiv sa 3 **C.** djeljiv sa 5 **D.** djeljiv sa 10

8. Za rješenje x jednadžbe $3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 7 \cdot 2^{\frac{x}{4}} = 20$ vrijedi:
   A. $\log_2 x = 3$ **B.** $\log_x 4 = -1$ **C.** $\log_4 8 = x$ **D.** $\log_2 x = -2$

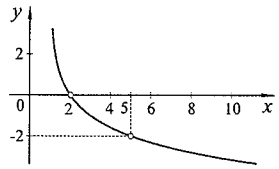
9. Uređeni par (x, y) rješenje je sustava jednadžbi $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{15}. \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5. \end{cases}$
   Tada je:
   A. $x + y = 8$ **B.** $x + y = 9$ **C.** $x + y = 10$ **D.** $x + y = 11$

10. Rješenje nejednadžbe $\ln x^2 < \ln(4x)$ jest:
    A. $x < 4$ **B.** $x < 2$ **C.** $x > 0$ **D.** $0 < x < 4$

Ispit 4

1. Broj $\left(9^{1-\log_3 4}\right)^{-1.5}$ pripada intervalu:
   A. $\langle -3, -1 \rangle$ **B.** $\langle -1, 1 \rangle$ **C.** $\langle 1, 3 \rangle$ **D.** $\langle 3, 5 \rangle$

2. Na slici je prikazan graf funkcije:
   A. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$
   B. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$
   C. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$
   D. $f(x) = \log_2 x$



3. Ako je $f(x) = -9.5 \cdot \ln(x - 1.1) + 5.2$, za koji je x $f(x) = 2$?
   A. $x \approx 2.5$ **B.** $x \approx -1.5$ **C.** $x = 2$ **D.** $x \approx 3.5$

4. Nakon kraćenja razlomak $\dfrac{\log^3 x}{\log x^2}$ jednak je:
   A. $\log^2 x$ **B.** $2\log^2 \sqrt{x}$ **C.** $\log^2 \sqrt{x}$ **D.** $\dfrac{\log^2 x}{2x}$

5. $\log(ab) - \log(bc) - \log(ca) =$
   A. $\log(abc)$ **B.** $-2\log a$ **C.** $-2\log b$ **D.** $-2\log c$

6. Rješenje eksponencijalne jednadžbe $4 \cdot 9^{1.5x-1} - 27^{x-1} = 33$ je:
   A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$

7. Zbroj rješenja jednadžbe $2^{|x-1|} = 16 \cdot 4^{-0.5}$ jednak je:
   A. -2 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 4

8. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $\log^2 x - \log x^2 = 3$, tada je:
   A. $x_1 \cdot x_2 = 10^3$ **B.** $x_1 \cdot x_2 = 1$
   C. $x_1 \cdot x_2 = 10^2$ **D.** $x_1 \cdot x_2 = 10$

9. Ako je $\log 2 = 0.301$, $\log 3 = 0.477$, tada je jednakost $5^{x+2} = 225$ ispunjena za:
   A. $x \approx -1.115$ **B.** $x \approx 1.365$ **C.** $x \approx 2.2$ **D.** $x \approx -2.2$

10. Broj uređenih parova koji su realna rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = 6 \\ \log_4 x + \log_4 y = -3 \end{cases}$
    jednak je:
    A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Ispit 5

1. Graf funkcije $f(x) = a^{x-1}$ prolazi točkom $T(-1, 100)$. Tada je:

   A. $a = 10$ **B.** $a = \frac{1}{10}$ **C.** $a = \sqrt{10}$ **D.** $a = -10$

2. Zbroj rješenja jednadžbe $4^{-|2x-1|} = \frac{1}{8}$ jednak je:

   A. 3 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

3. Broj znamenki broja n za koji vrijedi $\log_2 \log_2 \log_2 n = 3$ jednak je:

   A. 55 **B.** 77 **C.** 56 **D.** 78

4. Nultočka funkcije $f(x) = 2\log_9(x-1) + 1$ jest:

   A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{3}{2}$

5. Ako je $\log_2 x = a$, $\log_4 y = b$, onda je $\log_8 \frac{1}{xy}$ jednako:

   A. $\frac{a+b}{6}$ **B.** $\frac{2a-b}{3}$ **C.** $-\frac{a}{2b}$ **D.** $-\frac{a+2b}{3}$

6. Intenzitet svjetlosti ispod morske površine smanjuje se spuštanjem vertikalno u dubinu 2% po metru. Vidljivost svega 10% je na dubini od:

   A. 105 m **B.** 69 m **C.** 114 m **D.** 31 m

7. Ako je $x > 0$ razlomak $\frac{4^{\log_2 x}}{\log_4 2^x}$ jednak je:

   A. $2x$ **B.** 16 **C.** $4x$ **D.** 8

8. Asimptota grafa funkcije $f(x) = 3 \cdot 2^{1-x} + 1$ je pravac:

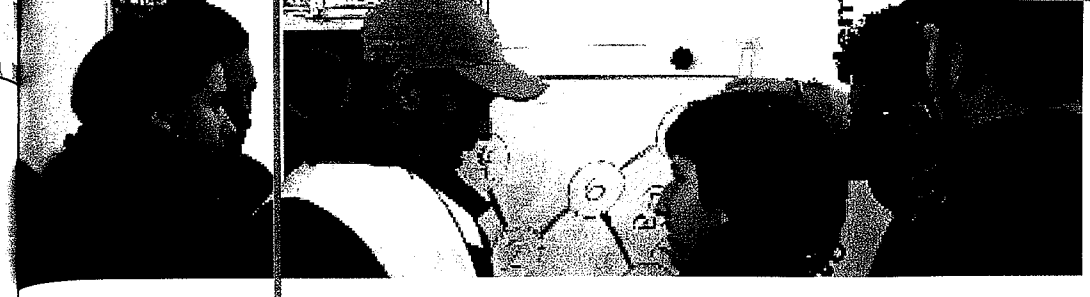
   A. $x + 1 = 0$ **B.** $y - 1 = 0$ **C.** $x - 1 = 0$ **D.** $y + 1 = 0$

9. Broj stanovnika nekog grada povećava se po eksponencijalnom zakonu $S = S_0 \cdot e^{kt}$, gdje je S_0 broj stanovnika na početku promatranja, a S_t broj nakon t godina. Ako se u posljednjih 10 godina broj povećao s 52 000 na 64 000, onda je koeficijent k približno jednak:

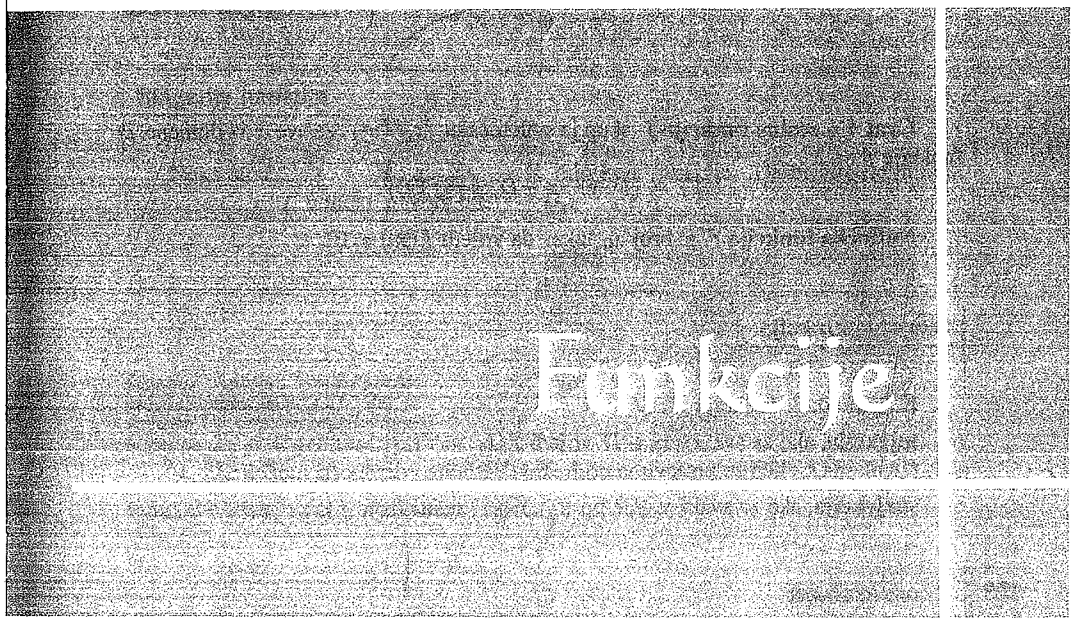
   A. -0.035 **B.** 0.11 **C.** 0.02 **D.** -0.043

10. Rješenje nejednadžbe $\log x^2 + \log^2 x < 3$ jest interval:

    A. $\langle 10, 100\rangle$ **B.** $\langle 0.001, 10\rangle$ **C.** $\langle 0.01, 1\rangle$ **D.** $\langle 0.1, 10\rangle$



9. lekcija



Pojam funkcije

Funkcija je pridruživanje, označimo ga s f, elemenata dvaju skupova po nekom zadanom pravilu. Pritom se zahtijeva:

Svakom elementu x prvog skupa pridružuje se **točno jedan** element y drugog skupa. Pišemo $y = f(x)$.

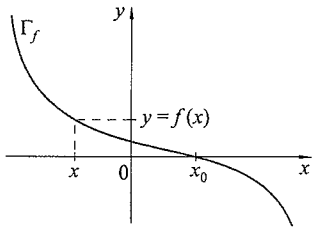
Funkcija je najčešće zadana analitički, jednadžbom koja potpuno određuje postupak pridruživanja (formulom).

Realne funkcije zovemo funkcijama kojima se realnim brojevima pridružuju realni brojevi. Realna funkcija f zadana je:

1. svojom domenom (područjem definicije) D;
2. svojom kodomenom (područjem vrijedosti) R;
3. zakonom pridruživanja $x \mapsto f(x)$.

Domena realne funkcije po dogovoru je skup svih realnih brojeva x za koje zadani zakon pridruživanja ima smisla. Takvu domenu nazivamo **prirodnom domenom**.

Slika funkcije f je skup svih $y \in R$ za koje postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. To je skup na koji funkcija preslikava svoju domenu, tj. najmanja od svih mogućih kodomena funkcije f. Označavamo ga s I. Realne funkcije prikazujemo grafički u koordinatnom sustavu.



Graf Γ_f **realne funkcije** f skup je svih točaka $(x, f(x))$, za sve x iz domene D funkcije f:

$$\Gamma_f = \{(x,y) : x \in D,\ y = f(x)\}.$$

Nultočka funkcije f je broj x_0 takav da vrijedi $f(x_0) = 0$.

Svojstva funkcija

Kažemo da je funkcija $f : D \to R$

— **injekcija**, ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
(Injekcija različitim brojevima pridružuje različite vrijednosti funkcije.);

— **surjekcija**, ako za svaki $y \in R$ postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$;

— **bijekcija**, ako je injekcija i surjekcija.

Ograničenost funkcije

Funkcija f je **ograničena** ako postoje brojevi m i M za koje vrijedi:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \qquad \forall x \in D.$$

Ako vrijedi samo jedna od gornjih nejednakosti, onda kažemo da je funkcija ograničena odozdo ili da je ograničena odozgo.

Parne i neparne funkcije

Funkcija f **parna** je ako i samo ako vrijedi:

$$f(-x) = f(x), \qquad \forall x \in D_f.$$

Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na y-os. Područje definicije parne funkcije simetrično je s obzirom na ishodište.

Funkcija f **neparna** je ako i samo ako vrijedi:

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall x \in D_f.$$

Graf neparne funkcije simetričan je s obzirom na ishodište. Područje definicije neparne funkcije simetrično je s obzirom na ishodište.

Periodične funkcije

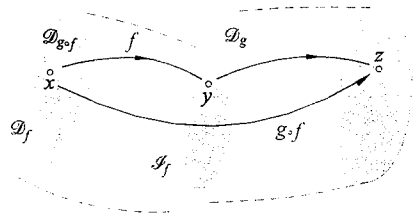
Za funkciju f kažemo da je **periodična** ako postoji broj $T > 0$ takav da za sve $x \in D_f$ vrijedi:

$$f(x) = f(x+T). \tag{1}$$

Broj T naziva se **period** funkcije f. Najmanji pozitivni broj T za koji vrijedi (1) naziva se **temeljni period**.

Slaganje funkcija

Neka su $f : D_f \to \mathbf{R}$, $g : D_g \to \mathbf{R}$ bilo koje funkcije. Da bi bila definirana, kompozicija $g \circ f$ u točki x mora biti $y \in D_g$.



Slaganje funkcija. Područje definicije kompozicije $g \circ f$ dio je domene D_g označen na slici tamnijom bojom.

Zato je područje definicije $D_{g \circ f}$ ove kompozicije podskup domene D_f, jer sadrži samo one elemente $x \in D_f$ za koje vrijedi $f(x) \in D_g$.

Nekomutativnost kompozicije. Slaganje funkcija nije komutativno; općenito vrijedi $f \circ g \neq g \circ f$.

Asocijativnost kompozicije. Za slaganje funkcija vrijedi zakon asocijativnosti:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Inverzna funkcija

Funkcija g **inverzna** je funkciji f ako vrijedi:

$$g(f(x)) = x, \qquad \text{za svaki } x \in D_f,$$
$$f(g(x)) = x, \qquad \text{za svaki } x \in D_g.$$

Pišemo $g = f^{-1}$. U isto je vrijeme funkcija f inverzna funkciji g te je isto tako $f = g^{-1}$. Zato kažemo da su funkcije f i g **međusobno inverzne**.

Da bi imala inverznu funkciju, funkcija mora biti bijekcija.

Gornje relacije možemo zapisati na jednostavniji način ovako: funkcije f i g međusobno su inverzne ako vrijedi:

$$y = f(x) \iff x = g(y), \qquad \forall x \in D_f, \quad \forall y \in D_g.$$

Inverznu funkciju nalazimo sljedećim postupkom:

1. Napišemo $y = f(x)$.
2. Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x.
3. Ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe, tad funkcija ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$.
4. Zamijenimo imena nepoznanicama x i y da bismo dobili zapis $y = f^{-1}(x)$.

Grafovi funkcije f i njoj inverzne funkcije g simetrični su s obzirom na pravac $y = x$.

9. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Izračunajmo vrijednost funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1}$ za $x = 3 + \sqrt{3}$.

Rješenje. Očito, uvrstimo li $x = 3 + \sqrt{3}$ u $f(x)$ bit će prilično računskog posla, pri čemu je teško izbjeći pogrešku. No, možda bi se razlomak mogao skratiti. Tada bismo zadatak znatno pojednostavnili. Podijelimo zato polinom iz nazivnika polinomom iz brojnika. Dobit ćemo količnik $x - 1$, a ostatak dijeljenja je nula. Zbog toga možemo pisati $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

Primijetimo da je $\dfrac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} = \dfrac{1}{x - 1}$ za sve realne brojeve x s iznimkom onih brojeva za koje je $x^2 - x - 1 = 0$.

I sada je $f(3 + \sqrt{3}) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$. Nakon racionalizacije nazivnika konačno dobijemo: $f(3 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$.

Primjer 2.

Ako je $f(1 - x) = 1 - x^2$, za svaki $x \in \mathbf{R}$, koliko je $f(1 + x)$?

Rješenje. Uvedimo zamjenu $1 - x = u$. Tada je $x = 1 - u$ te $x^2 = 1 - 2u + u^2$. Sada zadanu jednakost zapišimo: $f(u) = 1 - (1 - 2u + u^2) = -u^2 + 2u$.

Konačno je $f(1 + x) = -(1 + x)^2 + 2(1 + x) = -x^2 + 1$.

Primijetimo da za funkciju f vrijedi $f(1 - x) = f(1 + x)$. To je njezino svojstvo jednostavno objasniti. Naime, f je polinom drugog stupnja, za $x_0 = 1$ on prima ekstremnu vrijednost. A kako je njegov graf parabola čija je os simetrije pravac $x = 1$, vrijednosti funkcije za dva broja $1 - x$ i $1 + x$ jednake su.

Primjer 3.

Ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $\dfrac{1}{2} f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$, koliko je $f(2)$?

Rješenje. Za $x = 2$ imamo jednadžbu $\dfrac{1}{2} f(2) + 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

Za $x = \dfrac{1}{2}$ imamo jednadžbu $\dfrac{1}{2} f\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2f(2) = \dfrac{1}{2}$.

Dvije dobivene jednadžbe čine sustav jednadžbi s nepoznanicama $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i $f(2)$. Rješavanjem tog sustava nalazimo $f(2)=0$.

Primjer 4.

Odredimo prirodnu domenu funkcije $f(x)=\sqrt{\log(x^2-8x+13)}$.

Rješenje. Broj ispod drugog korijena ne može biti negativan, zbog toga valja postaviti uvjet $\log(x^2-8x+13)\geq 0$, odakle slijedi $x^2-8x+13\geq 1$.

Nadalje, logaritamska je funkcija definirana samo za pozitivne brojeve pa mora biti $x^2-8x+13>0$. No, ovaj je uvjet već obuhvaćen prethodnim pa prirodnu domenu određujemo iz uvjeta $x^2-8x+12\geq 0$.

Rješenje ove nejednadžbe je $D_f=\langle -\infty,2]\cup[6,+\infty\rangle$.

Primjer 5.

Odredimo skup svih vrijednosti funkcije $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-1}$.

Rješenje. Skup vrijednosti dane funkcije su realni brojevi a za koje vrijedi $\dfrac{x-1}{x^2+x-1}=a$. Tu jednakost možemo zapisati u obliku kvadratne jednadžbe $ax^2+(a-1)x+1-a=0$. Kako a mora biti realan broj, onda mora biti $D=(a-1)^2-4a(1-a)=(a-1)(5a-1)\geq 0$.

Konačno je $a=f(x)\in\left\langle -\infty,\frac{1}{5}\right]\cup[1,+\infty\rangle$.

Primjer 6.

Je li funkcija $f(x)=\dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$ parna ili neparna ili nije ni parna ni neparna?

Rješenje. Prije svega, ova funkcija je definirana za sve realne brojeve x. To znači da ima smisla računati i $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-3^{-x}}{2^{-x}+3^{-x}}.$$

Proširimo (pomnožimo) brojnik i nazivnik ovog razlomka s $2^x\cdot 3^x$. Tako dobijemo: $f(-x)=\dfrac{3^x-2^x}{2^x+3^x}=-\dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}=-f(x)$.

Dakle, funkcija f je neparna.

Primjer 7.

Odredimo skup svih vrijednosti funkcije $f(x)=2x+2^{\log_2(2x-x^2)}$.

Rješenje. Funkciju f možemo zapisati u obliku $f(x)=2x+2x-x^2=-x^2+4x$. No, vrlo je važno uočiti da je područje definicije funkcije f određeno uvjetom $2x-x^2>0$. (Zašto?)

Područje definicije funkcije f jest interval $\langle 0,2\rangle$, a skup svih njezinih vrijednosti jest skup vrijednosti polinoma $-x^2+4x$ na tom intervalu.

Konačno, skup vrijednosti funkcije f jest interval $\langle 0,4\rangle$.

Primjer 8.

Dana je funkcija $f(x)=(\sin 2x+\cos 2x)^2$.

1) Je li ta funkcija parna ili neparna?

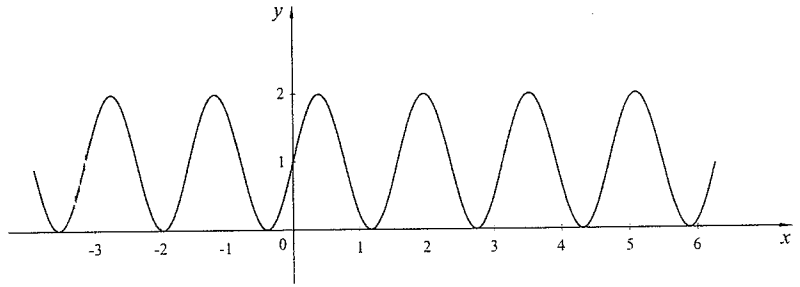
2) Je li ta funkcija periodična?

3) Odredimo nultočke ove funkcije.

4) Odredimo skup svih vrijednosti ove funkcije.

Rješenje. Nakon kvadriranja, funkciju možemo zapisati u obliku $f(x)=\sin^2 2x+2\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=1+2\sin 2x\cos 2x=1+\sin 4x$.

Graf ove funkcije vidimo na slici.



1) Ova funkcija nije ni parna $(f(-x)\neq f(x))$, ni neparna $(f(-x)\neq -f(x))$. Naime, vrijedi:

$$f(-x)=\sin 4(-x)+1=-\sin 4x+1.$$

2) Da, funkcija je periodična s osnovnim (najmanjim) periodom $P=\dfrac{\pi}{2}$.

3) Iz $f(x)=0$ slijedi $\sin 4x=-1$, a odatle je $4x=-\dfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$, odnosno $x=-\dfrac{\pi}{8}+k\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) Kako je $-1 \leq \sin 4x \leq 1$, vrijednosti funkcije f su u intervalu $[0, 2]$. To se jasno razabire i promatranjem njezina grafa.

Primjer 9.

Ako je $f(x) = x^2 - x - 1$, a $g(x) = 2x + 1$, riješimo nejednadžbu $f \circ g(x) \leq g \circ f(x)$.

Rješenje. Izračunajmo:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - (2x+1) - 1 = 4x^2 + 2x - 1.$$

I zatim: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x - 1) = 2(x^2 - x - 1) + 1 = 2x^2 - 2x - 1$.

Dobivamo konačno nejednadžbu $2x^2 + 4x \leq 0$ čije je rješenje interval $[-2, 0]$.

Primjer 10.

Ako je $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, odredimo funkciju $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}(x)$.

Rješenje. Idemo redom:

$$f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x},$$

$$f^3(x) = f \circ f^2(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right) = \ldots = \frac{x}{1-3x},$$

$$f^4(x) = f \circ f^3(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{1-3x}\right) = \ldots = \frac{x}{1-4x}.$$

Induktivno zaključujemo da je $f^n(x) = \dfrac{x}{1-nx}$.

Upozorimo kako smo do rješenja zadatka došli nepotpunom indukcijom. Želimo li prihvatiti konačni rezultat, trebalo bi ga ovjeriti dokazom matematičkom indukcijom.

Primjer 11.

Odredimo inverznu funkciju funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $x \neq 2$.

Rješenje. Inverznu funkciju neke funkcije nalazimo na sljedeći način:

1) Zapišemo $y = f(x)$, dakle $y = \dfrac{x}{x-2}$.

2) Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x: $x = \dfrac{2y}{y-1}$.

3) Ako postoji jedinstveno rješenje jednadžbe $y = f(x)$, tada f ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$.

Zaključujemo: $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{y-1}$.

4) Zamijenimo imena nepoznanicama x i y kako bismo dobili zapis $y = f^{-1}(x)$, odnosno $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

Primjer 12.

Odredimo inverznu funkciju funkcije $f(x) = a \cdot \log_2 x + b$ ako je $f(2) = 0$ i $f(1) = 1$.

Rješenje. Iz $f(2) = 0$ slijedi $a + b = 0$, a iz $f(1) = 1$ slijedi $b = 1$. Dakle, $f(x) = -\log_2 x + 1$.

Inverznu funkciju funkcije f odredit ćemo kao rješenje jednadžbe $x = -\log_2 y + 1$ po y. Tako je konačno $f^{-1}(x) = 2^{1-x}$.

Primjer 13.

Za funkciju f vrijedi $f(8^{x-1}) = 4^{x+1}$. Odredimo inverznu funkciju funkcije f.

Rješenje. Možemo zapisati $f(8^{x-1}) = 16 \cdot (8^{x-1})^{\frac{2}{3}}$ i zaključujemo da je $f(x) = 16 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

Zatim iz zapisa $x = 16 \cdot \sqrt[3]{y^2}$ valja izračunati y. Najprije je $x^3 = 16^3 \cdot y^2$, odatle $y^2 = \dfrac{x^3}{16^3}$. I konačno, $y = \dfrac{1}{64} x\sqrt{x}$.

Funkcija f definirana je za sve realne brojeve x, a vrijednosti su joj nenegativni realni brojevi. Zbog toga zaključujemo $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{64} x\sqrt{x}$.

9. lekcija Zadaci

1. Ako je $f(x-1) = \dfrac{1}{x+1}$, riješite nejednadžbu $f(x+1) \leq 1$.

2. Za funkciju f vrijedi $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Za koje x je $f(x) \leq 1$?

3. Ako je $f(4^x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$, koliko je $f(2^x)$?

4. Provjerite da za funkciju $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$ vrijedi $f(x+1) = 2f(x)$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.

5. Ako je $f(2^{x+1}) = 4^{x-1}$, koliko je $f(4)$?

6. Ako je $f(\log_3 x) = \dfrac{\log_{\frac{1}{3}} x}{1 - \log_{\sqrt{3}} x}$, koliko je $f(2)$?

7. Za funkciju f vrijedi $x \cdot f(x) + f(1-x) = 2x$, za svaki $x \in D_f$. Izračunajte $f(0)$.

Koliko rješenja ima jednadžba:

8. $x^2 - |x| = -\dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$;

9. $\ln|x| = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$;

10. $2^{-|x|} = |x^2 - 2|$?

Odredite prirodnu domenu funkcije:

11. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2x+5}}$;

12. $f(x) = \log \dfrac{2x}{x+1}$;

13. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$;

14. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

16. Provjerite je li funkcija:

$$f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^{-x} - 1}$$

parna ili neparna.

17. Dana je funkcija:

$$f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4}.$$

1) Je li ta funkcija parna ili neparna?
2) Je li ta funkcija periodična?
3) Odredite nultočke funkcije f.
4) Odredite skup svih vrijednosti funkcije f.

18. Dana je funkcija $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$. Ako je $f \circ f(u) = c$, odredite u.

19. Ako je $f(x) = 4^x$ te $g(x) = \log_{\sqrt{3}} x$, koliko je $g \circ f(\log_{\frac{1}{2}} 3)$?

20. Ako je $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, te $g(x) = 4^{1-x}$, koliko je $g \circ f(\sqrt{3})$?

Odredite inverznu funkciju funkcije:

21. $f(x) = 2^{2-x} - 1$;

22. $f(x) = 1 - \log_5(x-5)$.

9. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Ako je $f(x+1) = \dfrac{x-1}{2x+3}$, onda je:

A. $f(x-1) = \dfrac{x-2}{2x+1}$ **B.** $f(x-1) = \dfrac{x}{2x-1}$

C. $f(x-1) = \dfrac{x-3}{2x-1}$ **D.** $f(x-1) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

2. Ako je $f(9^{x-1}) = 3^{2x-1}$, onda je $f(3)$ jednako:

A. 9 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 1 **D.** 27

3. Područje definicije realne funkcije $f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}$ je skup:

A. $[0, k \cdot 2\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$ **B.** $\left[\dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \dfrac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

C. $\left[-\dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ **D.** $\left[-\dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

4. Skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2x + 3} + 1$ jest interval:

A. $\langle 1, 2]$ **B.** $\left\langle \dfrac{1}{3}, 1\right]$ **C.** $\langle 1, +\infty\rangle$ **D.** $\langle -\infty, 2]$

5. Broj rješenja jednadžbe $\dfrac{1}{4}x^2 = |x|$ jednak je:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

6. Funkcija $f(x) = c \cdot x^{n-1}$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$ neparna je za:

A. svaki cijeli broj n **B.** neparni cijeli broj n
C. parni cijeli broj n **D.** ni za koji cijeli broj n

7. Dana je funkcija $f(x) = x^2 - 1$. Zbroj rješenja jednadžbe $f \circ f(x) = 0$ jednak je:

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

8. Inverzna funkcija funkcije $f(x) = 2 \cdot 4^{1-x} - 1$ jest funkcija:

A. $f^{-1}(x) = \log_2 \sqrt{\dfrac{8}{x+1}}$ **B.** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} \log_2 8(x-1)$

C. $f^{-1}(x) = \log_4 x + 1$ **D.** $f^{-1}(x) = 2 \log_2 \dfrac{2}{x-1}$

Ispit 2

1. Za funkciju $f(x) = 2^x + 1$ vrijedi:
   A. $f(x+1) = f(x) + 1$ **B.** $f(x-1) = 2f(x) + 1$
   C. $f(x-1) = f(x) - 1$ **D.** $f(x+1) = 2f(x) - 1$

2. Ako je $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$, onda je $f(x^2-1)$ jednako:
   A. $x^4 - x^2 - 1$ **B.** $x^2 + 3x - 1$ **C.** $x^4 - x + 1$ **D.** $x^4 + x^2 - 3$

3. Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$ je:
   A. $\langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$ **B.** $[-\sqrt{2}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{2}]$
   C. $\langle -\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty]$ **D.** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

4. Broj rješenja jednadžbe $2^{x-1} = \sqrt{x+3}$ jednak je:
   A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

5. Samo je jedna od četiri navedene funkcije neparna. To je funkcija:
   A. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **B.** $f(x) = x^2 - x$
   C. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\ln x}$ **D.** $f(x) = x \cdot |x|$

6. Dane su funkcije $f(x) = x^2 - x$ i $g(x) = x - 2$. Rješenje nejednadžbe $f \circ g(x) < 2$ jest interval:
   A. $\langle 1, 4\rangle$ **B.** $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$
   C. $\langle -1, 2\rangle$ **D.** $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$

7. Ako je $f(x) = \dfrac{ax+1}{x-a}$, $a > 0$ te $f(0) + f(2) = 2$, onda je $f^{-1}(0) + f^{-1}(2)$ jednako:
   A. -2 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

8. Inverzna funkcija funkcije $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x}{3}$ jest funkcija:
   A. $f^{-1}(x) = 3^{1-x}$ **B.** $f^{-1}(x) = 3^{x-1}$
   C. $f^{-1}(x) = 3^x - 1$ **D.** $f^{-1}(x) = 3^{-x} - 1$

Ispit 3

1. Ako je $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $x \neq -1$, te $f(m) = n$, onda je:
   A. $m = \dfrac{n-1}{n+2}$ **B.** $m = \dfrac{n+2}{1-n}$ **C.** $m = \dfrac{n+1}{2-n}$ **D.** $m = \dfrac{n}{2-n}$

2. Neka je $f(x+1) = 4x - 1$. Rješenje jednadžbe $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3$ je:
   A. $x = \dfrac{1}{2}$ **B.** $x = -2$ **C.** $x = \dfrac{3}{4}$ **D.** $x = -1$

3. Funkcije $f(x) = 4^{\log_2(x-1)}$ i $g(x) = (x-1)^2$ jednake su za:
   A. svaki $x \in \mathbf{R}$ **B.** za svaki $x \in \mathbf{R}$ i $x > 0$ i $x \neq 1$
   C. za svaki $x \in \mathbf{R}$ i $x > 1$ **D.** za $x \in \mathbf{R}$ i $x \neq 1$

4. Za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(x) = x + f(x-1)$ te je $f(1) = 1$. Tada je $f(5)$ jednako:
   A. 11 **B.** 13 **C.** 15 **D.** 17

5. a) Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija $f + g$.
   b) Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija $f \cdot g$.
   c) Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija $f \circ g$.
   Točno je:
   A. samo a) **B.** a) i b) **C.** b) i c) **D.** a) i c)

6. Prirodno područje definicije funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-4)}$ skup je svih x:
   A. $x < -2$ **B.** $x < -2$ ili $x > 2$ i $x \neq \pm\sqrt{5}$
   C. 2 **D.** $-2 < x < 2$

7. Skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ jest interval:
   A. $\langle 0, 1]$ **B.** $\langle -1, 1]$ **C.** $\langle 1, +\infty\rangle$ **D.** $\left\langle \dfrac{1}{2} 1\right]$

8. Dane su funkcije $f(x) = ax^2 - x + 1$ i $g(x) = x - 2$. Polinom $f \circ g(x)$ prima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x ako je:
   A. $a > 0$ **B.** $a > \dfrac{3}{4}$ **C.** $a < 0$ **D.** $a > \dfrac{1}{4}$

Ispit 4

1. Ako je $f(2^{x-1}) = 4^x - 2^{x+1}$, onda je:

A. $f(x) = x^2 - 2x$ **B.** $f(x) = 4(x^2 - x)$
C. $f(x) = 2x^2 - x$ **D.** $f(x) = 2(x^2 - 2x)$

2. Ako je $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi)$, onda je $f\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$ jednako:

A. 0.5 **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** -0.5 **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Broj rješenja jednadžbe $\log_2 x^2 = 1 - x^2$ jednak je:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

4. Područje definicije realne funkcije $f(x) = \sqrt{\log_2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$ jest skup:

A. $\langle 1, +\infty\rangle$ **B.** $\langle -\infty, 0\rangle$ **C.** $\langle -1, 1\rangle$ **D.** $\langle 0, +\infty\rangle$

5. Skup svih vrijednosti funkcije $f(x) = \sqrt{1 - 4\sin^2 2x\cos^2 2x}$ jest interval:

A. $[-1, 1]$ **B.** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ **C.** $[0, 1]$ **D.** $[1, 2]$

6. Temeljni period funkcije $f(x) = \sin^2\frac{3x}{2} - \cos^2\frac{3x}{2}$ jest:

A. 3π **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** 6π **D.** $\frac{2\pi}{3}$

7. Kompozicija $h = f \circ g$ funkcija $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x}}$ i $g(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ jest funkcija:

A. $h(x) = x$ **B.** $h(x) = \sqrt{x}$ **C.** $h(x) = \sqrt[3]{x}$ **D.** $h(x) = \sqrt[6]{x}$

8. Inverzna funkcija funkcije f za koju vrijedi $f(\log_{\frac{1}{3}} x) = \frac{\log_3 x}{1 - \log_{\sqrt{3}} x}$ jest funkcija:

A. $f^{-1}(x) = \frac{x}{2x - 1}$ **B.** $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x - 1}$
C. $f^{-1}(x) = \frac{-x}{2x + 1}$ **D.** $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2x + 1}$

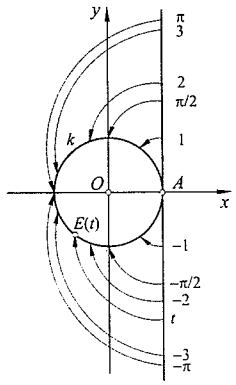
10. lekcija

Trigonometrijske funkcije

10. lekcija Ponovimo

Brojevna kružnica

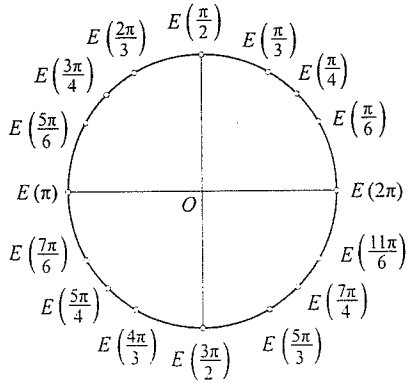
U pravokutnom (Kartezijevu) sustavu $(O; x, y)$ nacrtajmo kružnicu k čije je središte u ishodištu sustava, a polumjer joj je 1. Neka je $A = (1, 0)$ točka na presjeku kružnice i osi apscisa.



Prislonimo brojevni pravac uz kružnicu k, tako da svojim ishodištem dira kružnicu u točki A. Zamislimo da se taj pravac (bez rastezanja) namata oko kružnice. Tada će se njegov interval $[0, 2\pi\rangle$ preslikati na čitavu kružnicu jer je opseg kružnice 2π. Isto će se dogoditi i s intervalom $[2\pi, 4\pi\rangle$, kao i s intervalom $[-2\pi, 0\rangle$ (i svakim drugim intervalom duljine 2π).

Tako se svaki realni broj t s brojevnog pravca preslikava u jednu točku $E(t)$ na kružnici k. Tu kružnicu zato zovemo **brojevnom kružnicom**.

Broju 0 odgovara točka $(1, 0)$, broju $\frac{\pi}{2}$ točka $(0, 1)$, broju π točka $(-1, 0)$. Primijetimo da ista točka odgovara i broju $-\pi$, dok se $-\frac{\pi}{2}$ preslikava u $(0, -1)$. Tako se nastavlja za svaki kut. Točke brojevne kružnice pridružene nama najvažnijim kutovima dane su na slici.



Pretvorba stupnjeva u radijane

Ispruženom kutu (polovici punog kuta) mjere 180° odgovara radijanska mjera π. Ako je zadana mjera kuta u stupnjevima, tada se odgovarajuća mjera u radijanima određuje iz omjera:

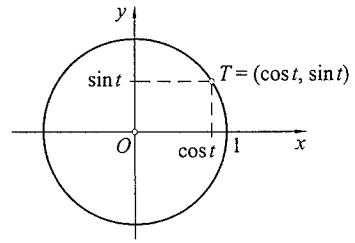
$$\alpha^\circ : 180 = \alpha \text{ rad} : \pi.$$

Odavde je:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{\alpha^\circ}{180} \cdot \pi, \qquad \alpha^\circ = \frac{\alpha \text{ rad}}{\pi} \cdot 180^\circ.$$

Definicije trigonometrijskih funkcija

Sinus i kosinus po volji odabranog kuta. Neka je t po volji odabran realni broj, $T = E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici. Tada je $T = (\cos t, \sin t)$. Dakle, vrijednost funkcije kosinus: $\cos t$ je *apscisa*, a vrijednost funkcije sinus: $\sin t$ je *ordinata* točke $T = E(t)$.



Omeđenost sinusa i kosinusa.
Za svaki realni broj t vrijedi:

$$|\sin t| \leqslant 1, \qquad |\cos t| \leqslant 1.$$

Kažemo da su funkcije sinus i kosinus **omeđene**.

Funkcija $f(x) = \sin x$ ima sljedeća svojstva:

1. Nultočke funkcije su brojevi $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
2. Maksimum funkcije je 1, a poprima se za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
3. Minimum funkcije je -1, a poprima se za $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
4. Na intervalu $[0, 2\pi]$ tijek funkcije je:

x	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

5. Funkcija je periodična s periodom 2π.

Funkcija $f(x) = \cos x$ ima sljedeća svojstva:

1. Nultočke su $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Maksimum funkcije je 1, a poprima se za $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

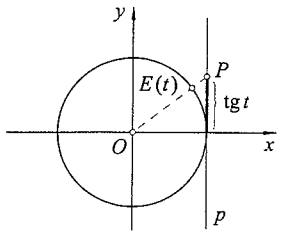
3. Minimum funkcije je -1, a poprima se za $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Na intervalu $[0, 2\pi]$ tijek funkcije je:

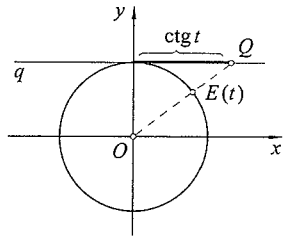
x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

5. Funkcija je periodična s periodom 2π.

Tangens po volji odabranog kuta. Neka je t po volji odabrani kut, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $T = E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici i P presjek pravca OT s tangentom p. Tad je $P = (1, \operatorname{tg} t)$. Dakle, vrijednost funkcije tangens: $\operatorname{tg} t$ je ordinata točke u kojoj pravac OT siječe tangentu p.



Kotangens po volji odabranog kuta. Neka je t po volji odabrani kut, $t \neq k\pi$, $T = E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici i Q presjek pravca OT s tangentom q. Tada je $Q = (\operatorname{ctg} t, 1)$. Dakle, vrijednost funkcije kotangens: $\operatorname{ctg} t$ je apscisa točke u kojoj pravac OT siječe tangentu q.



Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ ima sljedeća svojstva:

1. Nultočke su $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Vertikalne asimptote funkcije su pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. Na intervalu $[0, \pi]$ tijek funkcije je:

x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π
$\operatorname{tg} x$	0	$\nearrow$	$+\infty \quad -\infty$	$\nearrow$	0

4. Funkcija je periodična s periodom π.

5. $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$.

Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ima sljedeća svojstva:

1. Nultočke su $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Vertikalne asimptote funkcije su pravci $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. Na intervalu $[0, \pi]$ tijek funkcije je:

x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π
$\operatorname{ctg} x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. Funkcija je periodična s periodom π.

5. $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

Predznaci trigonometrijskih funkcija

	I	*II*	*III*	*IV*
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija za neke posebne brojeve

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

t	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin t$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Osnovni trigonometrijski identiteti

Temeljni identitet. Za svaki realni broj t vrijedi:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Temeljne veze između trigonometrijskih funkcija

	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
$\sin t$	–	$\pm\sqrt{1-\cos^2 t}$	$\dfrac{\operatorname{tg} t}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}$
$\cos t$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 t}$	–	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}$
$\operatorname{tg} t$	$\dfrac{\sin t}{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$	–	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg} t}$
$\operatorname{ctg} t$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$	$\dfrac{\cos t}{\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} t}$	–

Svojstva trigonometrijskih funkcija

Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija.
Kosinus je *parna funkcija*. Sinus, tangens i kotangens su *neparne funkcije*.
Zapisano formulama, za svaki realni broj t vrijedi:

$$\cos(-t) = \cos t,$$
$$\sin(-t) = -\sin t, \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Za svaki realni broj t za koji su funkcije tanges i kotangens definirane vrijedi:

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t,$$
$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

Periodičnost trigonometrijskih funkcija.
Funkcije sinus i kosinus periodične su funkcije s temeljnim periodom $P = 2\pi$:

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t. \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t.$$

Funkcije $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ i $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, za svaki φ i $\omega > 0$ također su periodične, a njihov je temeljni period jednak $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Funkcije tangens i kotangens periodične su funkcije s temeljnim periodom $P = \pi$:

$$\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t, \qquad \operatorname{ctg}(t + \pi) = \operatorname{ctg} t.$$

Funkcije $f(t) = \operatorname{tg}(\omega t + \varphi)$ i $f(t) = \operatorname{ctg}(\omega t + \varphi)$ periodične su za svaki φ i $\omega > 0$, s temeljnim periodom $\dfrac{\pi}{\omega}$.

Adicijski teoremi

Kosinus zbroja i razlike. Za sve realne brojeve s i t vrijede identiteti:

$$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s, \qquad \cos(t - s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s.$$

Formule redukcije za sinus i kosinus funkciju. Za svaki realni broj t vrijedi:

$$\cos(\pi - t) = -\cos t, \qquad \sin(\pi - t) = \sin t,$$
$$\cos(\pi + t) = -\cos t, \qquad \sin(\pi + t) = -\sin t,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t.$$

Sinus zbroja i razlike. Za sve realne brojeve s i t vrijede identiteti:

$$\sin(t + s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s, \qquad \sin(t - s) = \sin t \cos s - \cos t \sin s.$$

Tangens zbroja i razlike. Za sve realne brojeve s i t za koje su svi izrazi definirani vrijedi:

$$\operatorname{tg}(t + s) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} s}{1 - \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} s}, \qquad \operatorname{tg}(t - s) = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} s}.$$

Trigonometrijske funkcije dvostrukog i polovičnog kuta

Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta. Za svaki realni broj α vrijedi:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Također vrijedi:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha},$$

kad god su lijeva i desna strana identiteta definirane.

Sinus i kosinus polovičnog kuta. Za svaki realni broj α vrijede sljedeći identiteti:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \qquad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Predznak se uzima prema kvadrantu u kojem se nalazi kut $\frac{\alpha}{2}$.

Univerzalna zamjena. Vrijede identiteti:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

za sve realne brojeve α za koje su obje strane identiteta definirane.

Formule pretvorbe

Transformacija umnoška u zbroj. Za sve realne brojeve x i y vrijedi:

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\Big[\sin(x+y)+\sin(x-y)\Big],$$
$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\Big[\sin(x+y)-\sin(x-y)\Big],$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\Big[\cos(x+y)+\cos(x-y)\Big],$$
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\Big[\cos(x-y)-\cos(x+y)\Big].$$

Transformacija zbroja u umnožak. Za sve realne brojeve α i β vrijedi:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Neka je $z = x+yi$, $x, y \in \mathbf{R}$ kompleksni broj u Kartezijevu sustavu.

Prebacimo se iz Kartezijeva sustava u polarni radi jednostavnijeg računanja složenih operacija s kompleksnim brojevima (množenje, dijeljenje, potenciranje, korjenovanje).

Kartezijeve koordinate (x, y) i polarne koordinate ($r \in \mathbf{R}^+$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$) vezane su relacijama:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Trigonometrijski prikaz broja z:

$$x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Primjetimo $|z| = r$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Množenje i dijeljenje broja z napisanog u trigonometrijskom obliku:

Neka su $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Vrijedi:

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2));$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Kompleksni brojevi prikazani u trigonometrijskom obliku množe se (dijele se) tako da im se pomnože (podijele) moduli, a argumenti zbroje (oduzmu).

Potencija broja z napisanog u trigonometrijskom obliku:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Gornju formulu zovemo **de Moivreovom formulom**. Iz nje čitamo:

$$|z^n| = |z|^n,$$
$$\arg(z^n) = n\arg z.$$

n-ti korijen broja z napisanog u trigonometrijskom obliku:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

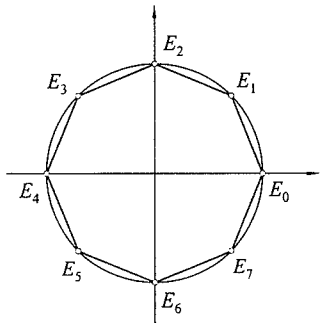
n-ti korijen kompleksnog broja z je svako rješenje jednadžbe $w^n = z$. Pišemo $w = \sqrt[n]{z}$. n-ti korijen kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ima točno n različitih vrijednosti.

10. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Brojevnoj kružnici upisan je pravilni osmerokut s vrhovima u točkama $E_k\left(k\cdot\frac{\pi}{4}\right)$, $k=0,1,\ldots,7$. Na kojem su luku što ga na brojevnoj kružnici određuju dva susjedna vrha pravilnog osmerokuta smještene točke $E(2)$, $E(-5)$, $E\left(\frac{23\pi}{6}\right)$, $E(55)$, $E\left(-\frac{111\pi}{4}\right)$, $E(-\sqrt{7})$, $E\left(\frac{43\pi}{3}\right)$?

Rješenje. Nacrtajmo pravilni osmerokut upisan brojevnoj kružnici na opisani način.



Točka $E(2)$ bit će smještena na luku kružnice između točaka $E_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ i $E_3\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Naime, $\frac{\pi}{2}\approx 1.57<2<\frac{3\pi}{4}\approx 2.35$.

Analogno, jer je $E_2\equiv E\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ i $E_1\equiv E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, a $-\frac{3\pi}{2}\approx -4.71$ i $-\frac{7\pi}{4}\approx -5.498$, to je točka $E(-5)$ smještena na luku E_1E_2.

Analogno je točka $E\left(\frac{23\pi}{6}\right)$ na luku E_7E_0, točka $E(55)$ na luku E_6E_7, točka $E\left(-\frac{111\pi}{4}\right)$ je točka E_1, točka $E(-\sqrt{7})$ na luku E_4E_5 i točka $E\left(\frac{43\pi}{3}\right)$ na luku E_1E_2.

Primjer 2.

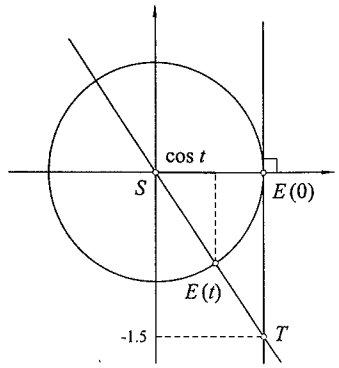
Odredimo na brojevnoj kružnici točku $E(t)$ ako je $\operatorname{tg} t=-1.5$, te $\sin t<0$. Na istoj slici prikažimo $\cos t$.

Rješenje. Nacrtajmo brojevnu kružnicu i prislonimo uz nju *os tangensa.* Zatim na poluosi na kojoj su smješteni negativni brojevi odredimo točku T tako da bude $|E(0)T|=1.5$.

Povucimo pravac ST i on brojevnu kružnicu siječe u dvije točke, jednoj u drugom i jednoj u četvrtom kvadrantu.

Rješenje je ona u četvrtom kvadrantu jer je u uvjetima zadatka istaknuto $\sin x<0$.

I sada još na slici prikažimo $\cos t$.



Primjer 3.

Za koje realne brojeve a postoji realan broj x tako da je $\sin x=\frac{2a+1}{a-2}$?

Rješenje. Sinus je omeđena funkcija; najmanja moguća vrijednost koju može primiti iznosi -1, a najveća 1. Treba, dakle, odrediti sve one vrijednosti realnog broja a za koje je $-1\le\frac{2a+1}{a-2}\le 1$.

Iz nejednadžbe $\frac{2a+1}{a-2}\ge -1$ slijedi $a\le\frac{1}{3}$ ili $a>2$.

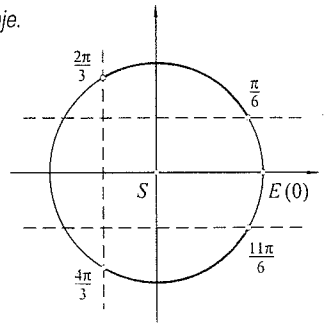
Iz nejednadžbe $\frac{2a+1}{a-2}\le 1$ dobijemo $-3\le a<2$.

Rješenje zadatka je presjek ovih dvaju skupova rješenja. Tako za sve a iz intervala $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$ postoji takav broj x za koji je $\sin x=\frac{2a+1}{a-2}$.

Primjer 4.

Prikažimo na brojevnoj kružnici skup svih rješenja sustava nejednadžbi $|\sin t|>\frac{1}{2}$ i $\cos t\ge -\frac{1}{2}$. Zapišimo intervale kojima pripadaju rješenja ovog sustava u intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$.

Rješenje.



Najprije iz $|\sin t|>\frac{1}{2}$ slijedi $\sin t<-\frac{1}{2}$ ili $\sin t>\frac{1}{2}$.

Povucimo paralelno s pravcem $SE(0)$ pravce na udaljenosti $\frac{1}{2}$ od njega. Ti će pravci sjeći brojevnu kružnicu u četirima točkama kojima su određeni rubovi intervala. Podebljajmo ih.

Na lukovima brojevne kružnice koji su u poluravninama iznad gornjeg i donjeg pravca leže točke koje zadovoljavaju prvi uvjet zadatka.

Zatim odredimo na osi apscisa točku kojoj pripada broj $-\frac{1}{2}$. Povucimo tom točkom okomicu na os x. Sve točke koje su na dijelu brojevne kružnice koji je u poluravnini s desna tomu pravcu zadovoljavaju drugi uvjet zadatka.

Presjek dvaju rješenja rješenje je zadatka.

Rješenje danog sustava nejednakosti svaki je realni broj $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \right\rangle$.

Primjer 5.

Ako je $\sin t + \cos t = \frac{2}{3}$, izračunajmo:

1) $\sin^3 t + \cos^3 t$; **2)** $\sin^4 t + \cos^4 t$.

Rješenje. Za rješenje obaju dijelova zadatka trebat će nam vrijednost umnoška $\sin t \cdot \cos t$. Kvadriramo li zadanu jednakost, dobit ćemo:

$$(\sin t + \cos t)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t = \frac{4}{9}.$$

Odatle izračunamo $\sin t \cdot \cos t = -\frac{5}{18}$.

1) Zapišimo zbroj kubova $\sin^3 t + \cos^3 t$ u obliku umnoška:

$$\sin^3 t + \cos^3 t = (\sin t + \cos t) \cdot (\sin^2 t - \sin t \cdot \cos t + \cos^2 t) = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{5}{18}\right) = \frac{23}{27}.$$

2) Imamo redom:

$$\sin^4 t + \cos^4 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cdot \cos^2 t = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{18}\right)^2 = \frac{137}{162}.$$

Primjer 6.

Ako je $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = m$, $m \neq 0$, koliko je:

1) $\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t$; **2)** $\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}$.

Rješenje. **1)** Zapišimo: $\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t = (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^3 - 3 \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)$.

Kako je $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = m$, te $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$, imamo:

$$\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t = m^3 - 3 \cdot 1 \cdot m = m^3 - 3m.$$

2) Zapišimo zadanu jednakost u obliku:

$$\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cdot \cos t} = \frac{1}{\sin t \cdot \cos t} = m.$$

Dakle, $\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t} = m^2$.

Primjer 7.

Ako je $\operatorname{tg}(-x) = 2.4$, $-\frac{15\pi}{2} < x < -7\pi$, koliko je $\cos x$?

Rješenje. Najprije, tangens je neparna funkcija pa je $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = 2.4$. Dakle, $\operatorname{tg} x = -2.4$.

Nadalje, jer je $-\frac{15\pi}{2} = -8\pi + \frac{\pi}{2}$ i $-7\pi = -8\pi + \pi$, zaključujemo da je broj x smješten u drugom kvadrantu.

I sada računamo: $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 5.76}} = -\frac{1}{2.6}$.

Dakle, $\cos x = -\frac{5}{13}$.

Primjer 8.

Izračunajmo: $\sin \frac{11\pi}{12} \cdot \sin \frac{29\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{41\pi}{12}$.

Rješenje. Prevedimo sve brojeve na I. kvadrant. Tako imamo: $\sin \frac{11\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{29\pi}{12} = \sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{41\pi}{12} = -\cos \frac{5\pi}{12}$.

I sada uvrstimo u danu jednakost:

$$\sin \frac{11\pi}{12} \cdot \sin \frac{29\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{41\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$$
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Primjer 9.

Koliko je $\cos(a - b)$ ako je $\sin a + \sin b = 1$, te $\cos a + \cos b = \sqrt{2}$?

Rješenje. Kvadrirajmo obje dane jednakosti:

$$\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \cdot \sin b = 1,$$
$$\cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cdot \cos b = 2.$$

Zatim ih zbrojimo pa dobijemo:

$$2 + 2(\sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b) = 3.$$

Izraz u zagradi jednak je $\cos(a - b)$, pa je $\cos(a - b) = \frac{1}{2}$.

Primjer 10.

Ako je $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, a $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{5}$, koliko je $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$?

Rješenje. Najprije ćemo raspisati:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{3},$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{5}.$$

Ove dvije jednadžbe možemo tumačiti kao sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ i $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Rješenje sustava je $\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{15}$, $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{4}{15}$.

Kada podijelimo dvije posljednje jednakosti, dobijemo $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{4}$.

Primjer 11.

Ako je $x + y = \frac{3\pi}{4}$, koliko je $(1 + \operatorname{ctg} x)(1 + \operatorname{ctg} y)$?

Rješenje. Iz $\operatorname{ctg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = -1$, (jer je $x + y = \frac{3\pi}{4}$) slijedi: $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 1$.

I sada računamo: $(1+\operatorname{ctg} x)(1+\operatorname{ctg} y) = 1+\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y+\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y = 1+1 = 2$.

Primjer 12.

Pojednostavnimo razlomak:

$$\frac{\cos(\alpha - \pi) \cdot \cos(2\pi - \beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right)}.$$

Rješenje. Najprije imamo:

$$\cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cos(2\pi - \beta) = \cos\beta,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin\beta,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) = \cos(\alpha - \beta).$$

Uvrstimo ove vrijednosti u razlomak pa imamo:

$$\frac{-\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{-\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = -1.$$

Primjer 13.

Ako je $f\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$, onda je:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x.$$

Dokažimo!

Rješenje. Najprije treba odrediti funkciju f. To možemo odrediti na nekoliko načina. Jedan je da zapišemo:

$$f\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Odatle slijedi $f(x) = \cos x - \sin x$.

I sada računamo:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)$$
$$= (\sin x - \cos x)(-\sin x - \cos x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Primjer 14.

Izračunajmo bez uporabe džepnog kalkulatora vrijednost brojevnog izraza:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{12}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}.$$

Rješenje. Najprije oduzmemo razlomke:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{12}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12}}.$$

Zatim brojnik i nazivnik razlomka zapišimo u obliku:

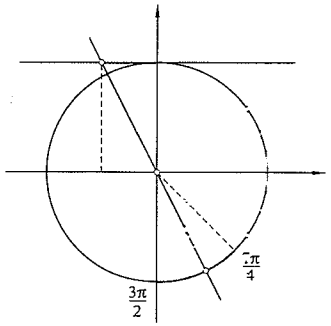
$$\frac{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{2\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$=8\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Primjer 15.

Ako je $2\operatorname{ctg}^2 x+7\operatorname{ctg}x+3=0$, $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4}$, kcliko je $\cos 2x$?

Rješenje. Dana kvadratna jednadžba ima dva rješenja, $\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{2}$ te $\operatorname{ctg}x=-3$. No, kako je $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4}$ (taj je interval na brojevnoj kružnici istaknut), onda uvjetima zadatka odgovara samo prvo rješenje, $\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{2}$.



I sada izračunamo $\cos x=\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Zatim izračunamo $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Dakle, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$.

Primjer 16.

Bez uporabe džepnog kalkulatora izračunajmo:

1) $\cos\frac{35\pi}{12}-\cos\frac{17\pi}{12}$; **2)** $\sin\frac{17\pi}{24}\cdot\sin\frac{23\pi}{24}$.

Rješenje. **1)** $\cos\frac{35\pi}{12}-\cos\frac{17\pi}{12}=\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$

$$=-2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) $\sin\frac{17\pi}{24}\cdot\sin\frac{23\pi}{24}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{24}-\cos\frac{40\pi}{24}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{4}.$$

10. lekcija Zadaci

1. **1)** Glavnu mjeru kuta $\alpha=3333°$ izrazite u radijanima.

2) Glavnu mjeru kuta $\beta=-\frac{143\pi}{12}$ izrazite u stupnjevima.

2. Odredite na brojevnoj kružnici sve točke $E(t)$ ako je $|\sin t|\le\frac{2}{3}$.

3. Odredite na brojevnoj kružnici točku $E(t)$, ako je $\cos t=-\frac{2}{3}$, a $\operatorname{ctg}t>0$.

4. Brojevnoj je kružnici $(r=1)$ upisan pravilni osmerokut $ABCDEFGH$ tako da je $A(1,0)$. Kojem luku kružnice koji spaja dva susjedna vrha osmerokuta pripada pojedina točka: $E(-13)$, $E(22)$, $E(-101)$, $E(1000)$?

5. Prikažite na brojevnoj kružnici sve točke $E(t)$ takve da vrijedi $\sin t>\cos t$.

6. Provjerite parnost sljedećih funkcija:

1) $f(x)=\sin|x|$;

2) $f(x)=\sin^2 3x-\cos^2 3x$;

3) $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x$;

4) $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$.

7. Ako je $\cos t=\frac{7}{25}$, $t\in\left\langle-4\pi,-\frac{7\pi}{2}\right\rangle$, koliko je $\operatorname{tg}(-x)$?

8. Ako je $\operatorname{tg}x=3\operatorname{ctg}x$, $x\in\left\langle-3\pi,-\frac{5\pi}{2}\right\rangle$, koliko je $\sin(-x)$?

9. Ako je $\sin x+\cos x=\frac{1}{4}$, koliko je $\sin^3 x+\cos^3 x$?

10. Ako je $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=4$, $x\in\langle 4,5\rangle$, koliko je $\sin x$?

11. Ako je $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=3$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, koliko je $\sin x+\cos x$?

12. Odredite temeljni period sljedećih funkcija:

1) $f(x)=\sin x\cdot\cos x$;

2) $f(x)=\sin x+\cos x$;

3) $f(x)=|\cos 2x|$;

4) $f(x)=-\sin(x-\pi)$.

13. Izračunajte: $\sin\frac{77\pi}{6}\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{53\pi}{3}\right)$.

14. Izračunajte: $\cos\left(-\frac{100\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{35\pi}{6}$.

15. Izračunajte vrijednost brojevnog izraza $\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{1-\sin x}{\cos x}$ ako je $x=-\frac{23\pi}{3}$.

16. Izračunajte:

$\cos 10°+\cos 20°+\cos 30°+\ldots+\cos 180°$.

17. Izračunajte:

1) $\cos x+\cos(x+\pi)+\cos(x+3\pi)+\ldots+\cos(x+n\pi)$, $n\in\mathbf{N}$;

2) $\sin x+\sin(x-\pi)+\sin(x-3\pi)+\ldots+\sin(x-n\pi)$, $n\in\mathbf{N}$.

18. Broj $\frac{\sin x+\operatorname{tg}x}{\cos x+\operatorname{ctg}x}$ ne može biti negativan broj ni za koju vrijednost realnog broja x za koji je jednoznačno određen.

19. Dokažite identitete:

1) $(1-\operatorname{ctg}x)^2+(1+\operatorname{ctg}x)^2=\dfrac{2}{\sin^2 x}$, $\sin x\neq 0$.

2) $\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}-\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x-1}$, $\sin x\cdot\cos x\neq 0$.

20. Izračunajte:

1) $\sin 105°$; **2)** $\cos 75°$.

21. Izračunajte:

$\sin\dfrac{5\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos\dfrac{5\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

22. Ako je $\sin\alpha+\sin\beta=1$ i $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$, izračunajte $\cos(\alpha-\beta)$.

23. Ako je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=25$ i $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=30$, izračunajte $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

24. Izračunajte: $\sin\dfrac{17\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{25\pi}{12}-\sin\dfrac{35\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{29\pi}{12}$.

25. Ako je $\cos x=0.8$, $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$, koliko je $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+x\right)$?

26. Izračunajte: $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{16\pi}{15}+\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{15}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{14\pi}{15}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{34\pi}{15}}$.

27. Koliko je $\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{15}-\cos\dfrac{7\pi}{15}}{\sin\dfrac{7\pi}{10}}$.

28. Ako je $f(x)=\dfrac{1+\cos 4x}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}$, koliko je $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$?

29. Izračunajte: $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{7}$.

30. Ako je $\sin\alpha=0.6$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, izračunajte $\sin 2\alpha$ i $\operatorname{tg}2\alpha$.

31. Koliko je $\cos\dfrac{x}{2}$, ako je $\operatorname{tg}x=-\dfrac{9}{40}$, $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$?

32. Izračunajte:

1) $1-8\sin^2\dfrac{17\pi}{16}\cdot\cos^2\dfrac{15\pi}{16}$;

2) $\cos^4\dfrac{23\pi}{12}-\sin^4\dfrac{25\pi}{12}$.

33. Ako je $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=-0.75$, $\dfrac{3\pi}{2}<x<\dfrac{7\pi}{4}$, koliko je $\cos 2x$?

34. Izračunajte bez uporabe tablica ili računala:

1) $\sin 75°\cdot\cos 75°$;

2) $\cos 15°\cdot\sin 75°$.

35. Ako je $\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, koliko je $\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}$?

36. Dokažite sljedeće identitete:

1) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=2$;

2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$.

37. Prikažite grafički funkcije:

1) $f(x)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$;

2) $f(x)=-0.5\cos 4\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)-1$;

3) $f(x)=1.5\cos\left(3x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

10. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Glavna mjera kuta od 55 rad iznosi:

A. $71°16'45''$ **B.** $171°16'37''$ **C.** $271°16'4''$ **D.** $371°16'37''$

2. Broj 111 smješten je na brojevnoj kružnici u:

A. I. kvadrantu **B.** II. kvadrantu **C.** III. kvadrantu **D.** IV. kvadrantu

3. Kut što ga opiše velika kazaljka sata za vrijeme od 7 h 45′ do 16 h 18′ iznosi:

A. 393° **B.** 3 078° **C.** 1 145° **D.** 3780°

4. Ako je $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{1}{5}$, tada je:

A. $\operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{2}$ **B.** $\operatorname{tg}x=\dfrac{2}{3}$ **C.** $\operatorname{tg}x=-\dfrac{3}{4}$ **D.** $\operatorname{tg}x=\dfrac{3}{2}$

5. Ako je $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-0.8$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, onda je $\sin(\pi+x)$ jednako

A. -0.6 **B.** -1 **C.** -0.8 **D.** -0.5

6. Za svaki realni broj x vrijednost izraza $\left(1-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ jednaka je:

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

7. Zbroj najveće i najmanje vrijednosti funkcije $f(x)=3\sin^2 x+5\cos^2 x$ iznosi:

A. 3 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 7

8. Razlomak $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ za sve α i β za koje je definiran identički je jednak:

A. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$ **D.** 1

9. Točna vrijednost brojevnog izraza $\sin\dfrac{\pi}{12}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{12}$ jednaka je:

A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{4}(2-\sqrt{3})$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{4}(2+\sqrt{3})$

10. Vrijednost brojevnog izraza $\dfrac{1}{\sin 15°}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 15°}$ jednaka je:

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** 5.55 **D.** $4\sqrt{3}$

Ispit 2

1. Glavna mjera kuta $\alpha = 2345°$ jednaka je:
   A. 3.23 rad **B.** 1.23 rad **C.** 4.23 rad **D.** 2.23 rad

2. Ako je $\frac{-15\pi}{2} < t < -7\pi$, točka $E(t)$ smještena je na brojevnoj kružnici u:
   A. I. kvadrantu **B.** II. kvadrantu **C.** III. kvadrantu **D.** IV. kvadrantu

3. Realna funkcija $f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ definirana je za svaki x:
   A. $x \in \mathbf{R}$ **B.** $x \in \mathbf{R},\ x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
   C. $x \in \langle -1, 1\rangle$ **D.** $x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z}$

4. Ako je $a = \cos 1$, $b = \cos 2$, $c = \cos 3$, $d = \cos 4$, onda je:
   A. $a < b < c < d$ **B.** $c < d < b < a$ **C.** $c < b < a < d$ **D.** $b < c < d < a$

5. Ako je $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, onda je $\sin(-x)$ jednako:
   A. -1 **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Vrijednost brojevnog izraza $\sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + \ldots + \sin^2 89°$ jednaka je:
   A. 1.5 **B.** 89 **C.** 0 **D.** 44.5

7. Ako je $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$, onda je $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$ jednako:
   A. $m(m-3)$ **B.** $m^2 - 3$ **C.** $m^3 - 1$ **D.** $m^3 - 3m$

8. Ako je $\sin\frac{x}{2} = \frac{5}{13}$ te $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$, onda je:
   A. $\sin x = -\frac{10}{13}$ **B.** $\sin x = \frac{12}{13}$ **C.** $\sin x = \frac{144}{169}$ **D.** $\sin x = -\frac{120}{169}$

9. Točna vrijednost brojevnog izraza $\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}$ jednaka je:
   A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\sqrt{3}$

10. Dane su funkcije $f(x) = \sin(1-x)$ i $g(x) = 2x + 1$. Koliko je $f \circ g\left(\frac{7\pi}{12}\right)$?
    A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ispit 3

1. Kut od $255°42'$ iznosi približno:
   A. 2.46 rad **B.** 3.46 rad **C.** 4.46 rad **D.** 5.46 rad

2. U kojem je kvadrantu na brojevnoj kružnici smješten broj 77?
   A. prvom **B.** drugom **C.** trećem **D.** četvrtom

3. Nejednakost $\sin x < \cos x$ ispunjena je za svaki realni broj x iz intervala:
   A. $\langle 0, \pi\rangle$ **B.** $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ **C.** $\left\langle -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ **D.** $\left\langle \pi, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

4. Vrijednost brojevnog izraza $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 2° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 89°$ jednaka je:
   A. 1 **B.** 45 **C.** 0 **D.** $\sqrt{2}$

5. Razlomak $\frac{1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$ jednak je:
   A. $\operatorname{tg}^2\alpha$ **B.** -1 **C.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$ **D.** 1

6. Ako je $\sin x + \cos x = m$, onda je $\sin^3 x + \cos^3 x$ jednako:
   A. $\frac{m(m-3)}{2}$ **B.** $\frac{m^3 - 1}{3}$ **C.** $\frac{m}{2}(3 - m^2)$ **D.** m^3

7. Ako je $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{5}$, onda je $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ jednako:
   A. $-\frac{1}{4}$ **B.** 4 **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** 1

8. Ako je $\sin x = \frac{5}{13}$, $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$, onda je:
   A. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2$ **B.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{5}{6}$ **C.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 5$ **D.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{5}{6}$

9. Osnovni period funkcije $f(x) = \sqrt{1 - 4\sin^2\frac{x}{3} \cdot \cos^2\frac{x}{3}}$ jednak je:
   A. π **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** 3π **D.** $\frac{\pi}{3}$

10. Vrijednost razlomka $\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$ za $x = \frac{7\pi}{8}$ iznosi:
    A. 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** -0.5

Ispit 4

1. Ako je $\sin\alpha = -\frac{21}{29}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, onda je:

   A. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{20}{29}$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{21}$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{21}{29}$ **D.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$

2. Jednakost $\cos x = \frac{1}{1-m}$ ima smisla samo ako je:

   A. $m \in [-1, 1]$ **B.** $m \in [0, +\infty\rangle$ **C.** $m \in [0, 2]$ **D.** $m \in \langle -\infty, 0]\cup[2, +\infty\rangle$

3. Vrijednost brojevnog izraza $\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}$ jednaka je:

   A. 2.25 **B.** 1.25 **C.** -0.25 **D.** 1

4. Funkcija $f(x) = \sin^n x\cdot\cos^n x$ parna je:

   A. ako je n paran cijeli broj **B.** za svaki cijeli broj n
   C. ako je n neparan cijeli broj **D.** ni za koji cijeli broj n

5. Ako je $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$, onda je:

   A. $\cos 2\alpha = \frac{3}{8}$ **B.** $\cos 2\alpha = -\frac{1}{8}$ **C.** $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$ **D.** $\cos 2\alpha = -\frac{5}{8}$

6. Za svaki realni broj x vrijednost izraza $(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)^2 - (\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x)^2$ jednaka je:

   A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

7. Vrijednost brojevnog izraza $\sin(t+\pi)+\sin(t+2\pi)+\sin(t+3\pi)+\ldots+\sin(t+100\pi)$ jednaka je:

   A. $100\sin t$ **B.** 1 **C.** 50 **D.** 0

8. Vrijednost brojevnog izraza $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}$ jednaka je:

   A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 0.5

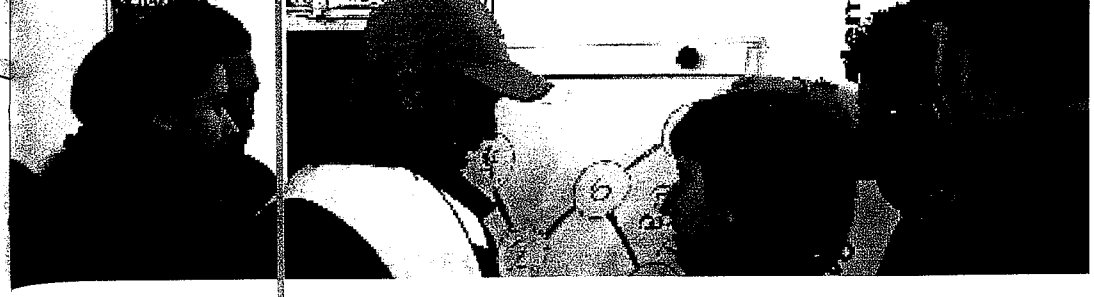
9. Za sve $x \neq k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, razlomak $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ identički je jednak:

   A. $\frac{1}{4}\cos 2x$ **B.** $\frac{1}{4}\sin x$ **C.** $\frac{1}{4}\cos x$ **D.** $\frac{1}{4}\sin 2x$

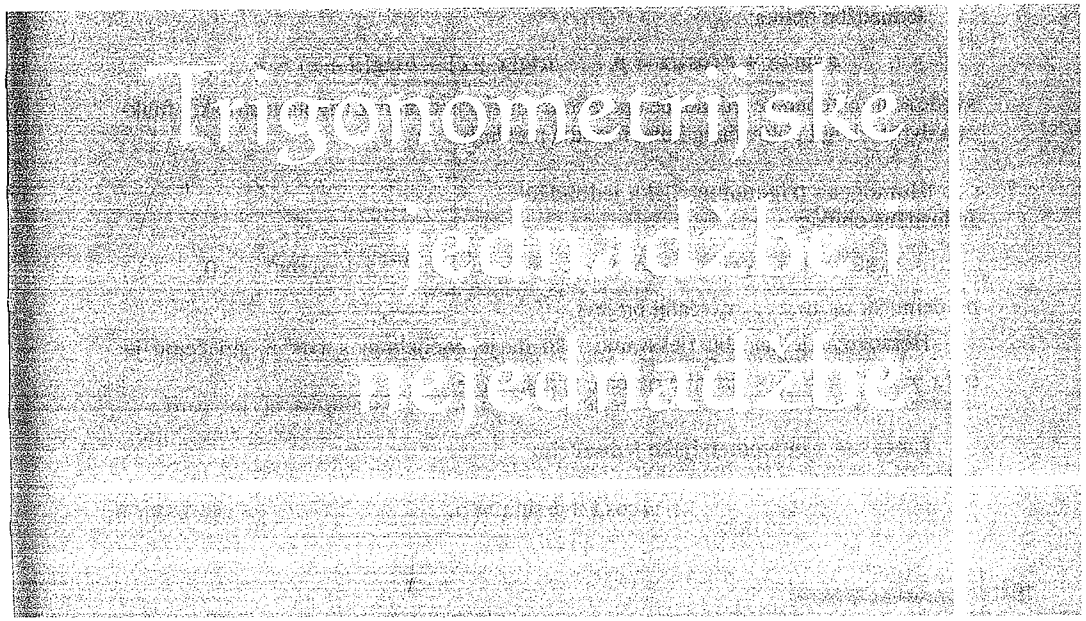
10. Za funkciju f vrijedi $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x-\pi) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

    Tada je $f\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ jednako:

    A. $\sqrt{3}$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** 0.5 **D.** $-\sqrt{3}$



11. lekcija



11. lekcija Ponovimo

Trigonometrijske jednadžbe

Osnovne trigonometrijske jednadžbe

Jednadžbe oblika:

$$\sin x = p, \qquad \cos x = p, \qquad \operatorname{tg} x = r, \qquad \operatorname{ctg} x = r,$$

gdje su p i r realni brojevi, $|p| \leqslant 1$.

Vrijedi:

$$p = \sin\alpha \iff x = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ ili } x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$p = \cos\alpha \iff x = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ ili } x = -\alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$r = \operatorname{tg}\alpha \iff x = \alpha + k \cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$r = \operatorname{ctg}\alpha \iff x = \alpha + k \cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Na osnovne se jednadžbe svode i jednadžbe oblika:

$$\sin(ax+b) = p, \quad \cos(ax+b) = p, \quad \operatorname{tg}(ax+b) = r, \quad \operatorname{ctg}(ax+b) = r.$$

Jednadžbe oblika:

$$a\sin bx + c\cos dx = p, \qquad a\operatorname{tg}(x+c) + b\operatorname{ctg}(d+x) = r$$

svode se na algebarske jednadžbe uporabom adicijskih teorema, trigonometrijskih funkcija dvostrukog i polovičnog kuta, formula pretvorbe.

Homogena trigonometrijska jednadžba

Jednadžba oblika:

$$a_n \sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + \ldots + a_1 \sin x\cos^{n-1} x + a_0\cos^n x = 0,$$

pri čemu su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi.

Homogenu jednadžbu rješavamo tako da je podijelimo s $\cos^n x$, pri čemu je $\cos x \neq 0$, tj. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ nije rješenje te jednadžbe.

Linearna trigonometrijska jednadžba

Jednadžba oblika:

$$a\cos x + b\sin x = p,$$

gdje su a, b i p realni brojevi.

Nju rješavamo tako da je svedemo na algebarsku jednadžbu pomoću univerzalnih zamjena trigonometrijskih funkcija.

Trigonometrijske nejednadžbe

Trigonometrijska nejednadžba je nejednadžba u kojoj je nepoznanica varijabla neke trigonometrijske funkcije. Svaka trigonometrijska nejednadžba svodi se na **osnovnu nejednadžbu** koja je oblika:

$$\sin x < a; \quad \cos x < b; \quad \operatorname{tg} x < c; \quad \operatorname{ctg} x < d.$$

Sinusoida

Graf funkcije $f(x) = \sin x$ zove se **sinusoida**.

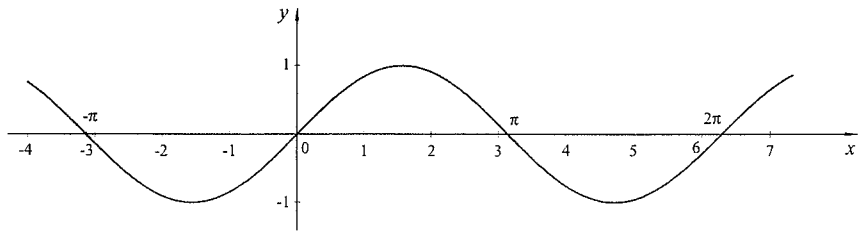
Sinus je omeđena funkcija, $|\sin x| \leq 1$, pa je sinusoida smještena unutar pruge $-1 \leq y \leq 1$, a proteže se iznad cijele osi apscisa.

Funkcija $f(x) = \sin x$ je periodična, tj. za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi:

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x,$$

gdje je k bilo koji cijeli broj. Najmanji period ove funkcije je 2π.

Nultočke funkcije $f(x) = \sin x$ su brojevi $x_0 = m \cdot \pi$, $m \in \mathbf{Z}$.



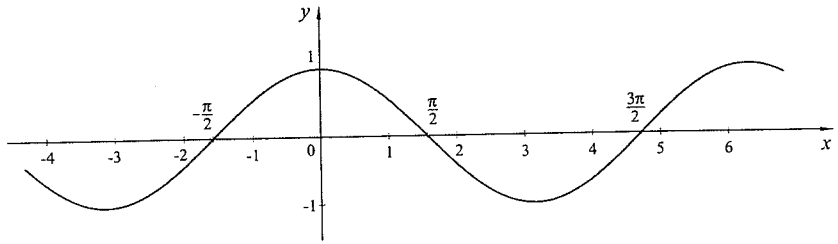
Graf funkcije $f(x) = \sin x$.

Funkcija $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ je periodična. Njezin je temeljni period $\dfrac{2\pi}{b}$.

Broj $|a|$ je **amplituda** sinusoide. Vrijednosti funkcije f su unutar intervala $-|a| \leq \sin x \leq |a|$.

Graf funkcije $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ nastaje pomakom grafa funkcije $g(x) = a\sin bx$ za $-\dfrac{c}{b}$.

Kako je $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, graf funkcije $f(x) = \cos x$ sukladan je sinusoidi, samo je translatiran duž osi x za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo.



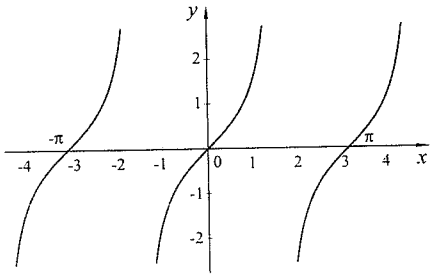
Graf funkcije $f(x) = \cos x$.

Graf funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$

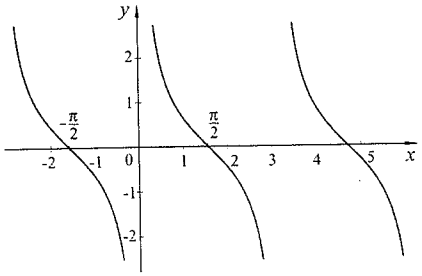
Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ definirana je za sve realne brojeve osim za $x = (2k+1)^\circ \frac{\pi}{2}$. Ta je funkcija periodična s temeljnim periodom π.

Stoga je dovoljno nacrtati graf funkcije nad intervalom $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nad tim intervalom funkcija $\operatorname{tg} x$ je monotono rastuća. Dakle, ta funkcija nije omeđena.

Pravci $x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ asimptote su grafa.



Graf funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$.



Graf funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Kako je $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, zaključujemo da se graf funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} x$ dobije iz grafa funkcije $\operatorname{tg} x$ pomakom za $\frac{\pi}{2}$ udesno te potom njegovim zrcaljenjem prema osi x.

11. lekcija Primjeri

Primjer 1.

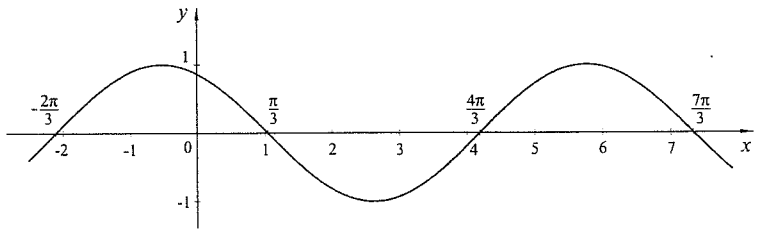
Prikažimo grafički funkciju $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Rješenje. Vrijednosti ove funkcije su unutar intervala $[-1, 1]$; to znači da će graf biti smješten unutar pruge $|y| \leq 1$.

Period funkcije f jednak je 2π.

Graf funkcije sukladan je grafu funkcije $-\sin x$, ali je pomaknut za $\frac{\pi}{3}$ u pozitivnom smjeru osi x.

Nacrtajmo sada dio grafa dane funkcije.

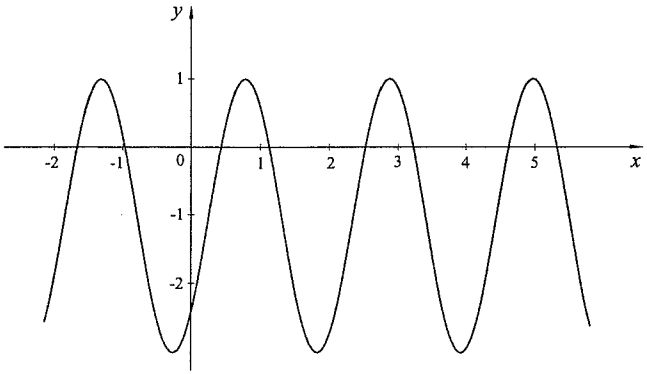


Primjer 2.

Prikažimo grafički funkciju $f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) - 1$.

Rješenje. Amplituda je jednaka 2. To znači da će graf biti smješten unutar pruge paralelne s osi x, a širine 4. Period funkcije je $\frac{2\pi}{3}$, jedan val kosinusoide proteže se nad intervalom duljine $\frac{2\pi}{3}$.

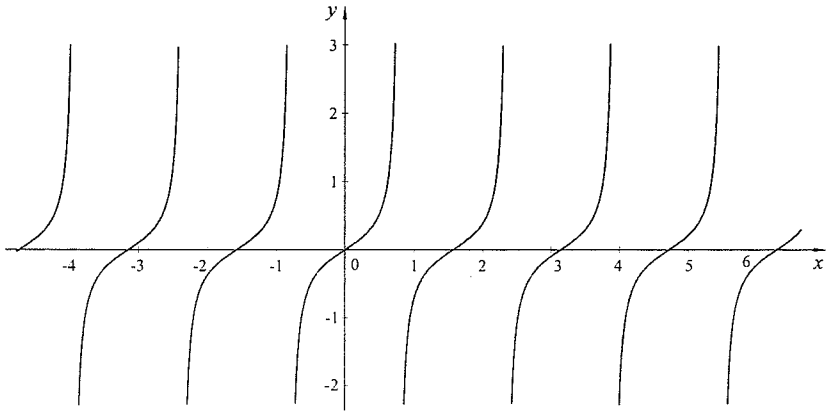
Nadalje, imamo pomak za $\frac{\pi}{4}$ u pozitivnom smjeru osi x. I konačno, -1 znači da ćemo graf spustiti za 1 u smjeru osi y.



Primjer 3.

Prikažimo grafički funkciju $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}(2x - \pi)$.

Rješenje. Najprije možemo zapisati $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}(2x - \pi) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} 2x$. I sada crtamo graf imajući na umu da je period funkcije jednak $\frac{\pi}{2}$. Osim toga, koeficijent $\frac{1}{3}$ znači da za svaki x treba uzeti trećinu ordinate grafa funkcije $f(x) = \operatorname{tg} 2x$.



Primjer 4.

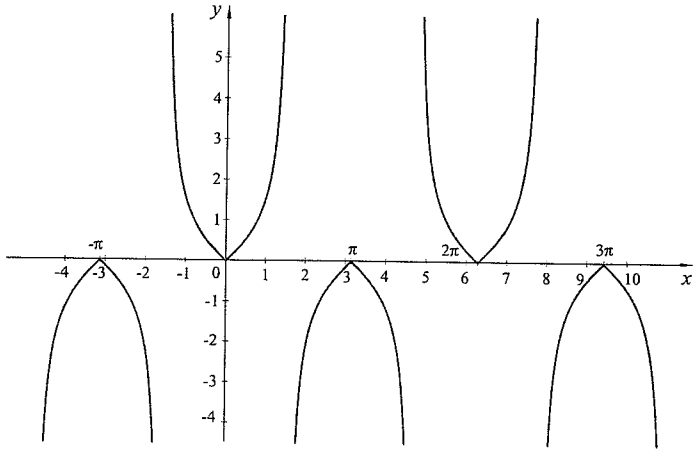
Prikažimo grafički funkciju $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$.

Rješenje. Zapišimo funkciju f na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x}.$$

I tako je $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \sin x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x, & \sin x < 0 \end{cases}$.

Nacrtamo graf funkcije $\operatorname{tg} x$ pa dijelove grafa nad intervalima u kojima $\sin x$ prima pozitivne vrijednosti zadržimo, a dijelove koje su nad intervalima u kojima je $\sin x \leq 0$ zrcalimo prema osi x.

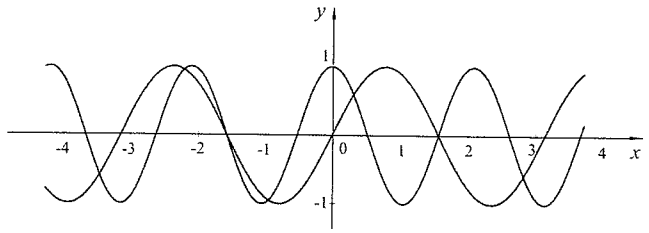


Primjer 5.

Koliko rješenja u intervalu $[-\pi, \pi]$ ima jednadžba $\sin 2x = \cos 3x$?

Rješenje. Ovaj zadatak rješavamo koristeći se grafovima dviju funkcija, $f(x) = \sin 2x$ i $g(x) = \cos 3x$.

Prikažimo ih na istoj slici, u istom koordinatom sustavu.



Pogledajmo u koliko se točaka sijeku ova dva grafa. Ukupno šest. U tim su točkama vrijednosti dviju funkcija jednake.

Zadana jednadžba ima na danom intervalu 6 rješenja.

Primjer 6.

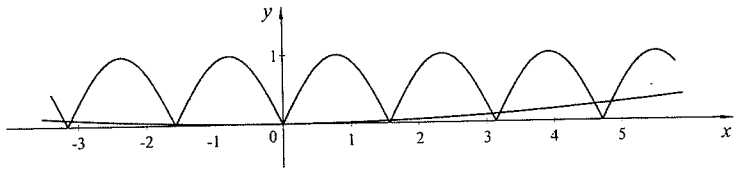
Koliko rješenja ima jednadžba $|\sin 2x| = \frac{1}{100}x^2$?

Rješenje. I u rješenju ovog zadatka koristit ćemo se grafičkom metodom. Na istoj slici prikažemo grafove funkcije $f(x) = |\sin 2x|$ i $g(x) = \frac{1}{100}x^2$.

Graf funkcije f dobijemo iz grafa funkcije $\sin 2x$ zrcaljenjem prema osi x onih njegovih dijelova koji su ispod osi x. Dijelove iznad osi x zadržavamo.

Graf kvadratne funkcije g je parabola s tjemenom u ishodištu koordinatnog sustava.

Primijetite kako je dovoljno crtati grafove samo u prvom kvadrantu. Zbog parnosti obiju funkcija slika je simetrična prema osi y, pa koliko je sjecišta dviju krivulja u prvom, toliko ih je i u drugom.

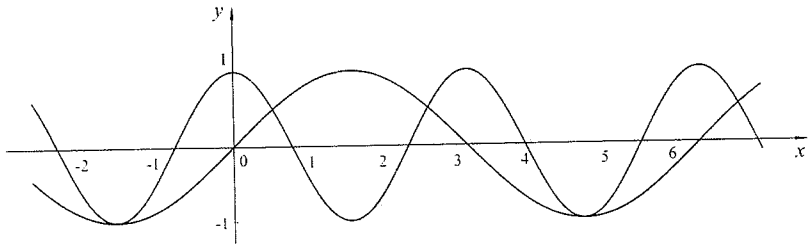


Pomnjivim prebrajanjem nalazimo da se dvije krivulje sijeku u ukupno 23 točke. Toliko rješenja onda ima dana jednadžba.

Primjer 7.

Riješimo nejednadžbu $\cos 2x \leq \sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje. Prikažimo u istom koordinatnom sustavu funkcije $f(x) = \cos 2x$ i $g(x) = \sin x$.



Nakon toga pogledajmo gdje je graf od f ispod grafa funkcije g. Podebljajmo te dijelove grafa funkcije f i projicirajmo ih ortogonalno na os x. Interval koji smo na ovaj način dobili, rješenje je zadatka.

Sada još valja samo odrediti rubove tih intervala. U tu svrhu treba riješiti jednadžbu $\cos 2x = \sin x$. No, ova je jednadžba jednostavna kvadrana jednadžba $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ s rješenjima $\sin x = \frac{1}{2}$ i $\sin x = -1$.

Na intervalu $[0, 2\pi]$ tako imamo $x = \frac{\pi}{6}$ i $x = \frac{5\pi}{6}$, te $x = \frac{3\pi}{2}$.

I konačno, rješenje nejednadžbe je $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ te broj $\frac{3\pi}{2}$ za koji vrijedi znak jednakosti.

Primjer 8.

Riješimo jednadžbe:

1) $2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$; **2)** $\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Rješenje. **1)** Jednadžbu zapišimo u obliku $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Ovo je *osnovna trigonometrijska jednadžba.* Njezina su rješenja $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ili $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$.

U prvom slučaju imamo $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ te je $x_1 = (4k+3) \cdot \pi$. A u drugom je slučaju $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} + n \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{6} + n \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + (n+1) \cdot 2\pi$. Dakle, $x_2 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 4\pi$. U oba su slučaja k i n cijeli brojevi.

2) Iz $\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ slijedi $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, što je također *osnovna jednadžba.* Njezino je rješenje $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

I konačno je $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 9.

Riješimo jednadžbu: $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$.

Rješenje. Zamjenom $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ dobivamo kvadratnu jenadžbu $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ s nepoznanicom $\cos x$. Od dva njezina rješenja, $\cos x = \frac{1}{2}$ i $\cos x = -2$, drugo, zbog omeđenosti funkcije kosinus, odbacujemo.

A iz $\cos x = \frac{1}{2}$ slijedi $x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{R}$.

Primjer 10.

Riješimo jednadžbu: $2\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x = 1$.

Rješenje. Zamijenimo $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, pa jednadžba prima oblik $\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = 0$.

Sada podijelimo jednadžbu s $\sin^2 x$, $\sin x \neq 0$. Dobit ćemo kvadratnu jednadžbu $\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x + 2 = 0$.

Njezina su rješenja $\operatorname{ctg} x = -1$ ili $\operatorname{ctg} x = -2$. U prvom slučaju imamo $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$, a u drugom $x \approx -0.4636 + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 11.

Riješimo jednadžbu: $\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} - 1)\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

Rješenje. Riješimo ovu kvadratnu jednadžbu:

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2}.$$

Dva su rješenja, $(\operatorname{tg} x)_1 = -1$ ili $(\operatorname{tg} x)_2 = \sqrt{3}$. Tako dobijemo i konačno rješenje zadane jednadžbe, $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$ ili $x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 12.

Riješimo jednadžbu: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$.

Rješenje. Pomnožimo li danu jednadžbu s $\operatorname{tg}^2 x$, dobit ćemo bikvadratnu jednadžbu $\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$. Prepoznajemo na lijevoj strani kvadrat dvočlana izraza, pa jednadžba prima oblik $(\operatorname{tg}^2 x - 1)^2 = 0$.

Rješenje ove jednadžbe jest $\operatorname{tg}^2 x = 1$, odnosno $\operatorname{tg} x = -1$ ili $\operatorname{tg} x = 1$.

Konačno, rješenje zadane jednadžbe jest $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 13.

Riješimo jednadžbu: $3\sin x + 2\cos x = 3$.

Rješenje. Ovakve, *linearne trigonometrijske jednadžbe* najčešće rješavamo primjenom *univerzalnih zamjena*. Uz oznaku $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ dana jednadžba prelazi u jednadžbu $3\frac{2t}{1+t^2} + 2\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3$. Nakon sređivanja dobijemo kvadratnu jednadžbu $5t^2 - 6t + 1 = 0$ s rješenjima $t_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ i $t_2 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0.2$.

Zadana jednadžba ima dva skupa rješenja: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ i $x = 2\operatorname{arc\,tg} 0.2 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 14.

Riješimo jednadžbu: $\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{6} = -1$.

Rješenje. Na lijevoj strani jednadžbe razaznaje se izraz koji je raspis od $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{6}\right)$ (*adicijski teorem*). Zbog toga imamo: $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{6}\right) = \sin\frac{x}{3} = -1$. Slijedi $\frac{x}{3} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ te konačno $x = \frac{9\pi}{2} + k \cdot 6\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 15.

Riješimo jednadžbu: $\sin 5x = \sin 3x$.

Rješenje. Jednadžbu najprije zapišimo u obliku $\sin 5x - \sin 3x = 0$. Zatim primjenom formula pretvorbe zbroja u umnožak trigonometrijskih funkcija imamo: $2\cos 4x \cdot \sin x = 0$.

Odatle slijedi: za $\cos 4x = 0$ je $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}$, a za $\sin x = 0$ je $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 16.

Riješimo jednadžbu: $(\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$.

Rješenje. Kvadriramo lijevu stranu jednadžbe te je ona jednaka $\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x$.

Tako je zadana jednadžba ekvivalentna jednadžbi $1 - \sin 2x = \sin 2x$, odnosno jednadžbi $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

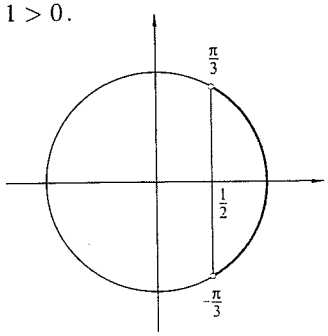
Njezino je rješenje $x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$ ili $x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 17.

Riješimo nejednadžbu: $2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 > 0$.

Rješenje. Nejednadžbu zapišimo u ekvivalentnom obliku: $\cos x > \frac{1}{2}$.

Prikažimo sada rješenje zadatka na brojevnoj kružnici.

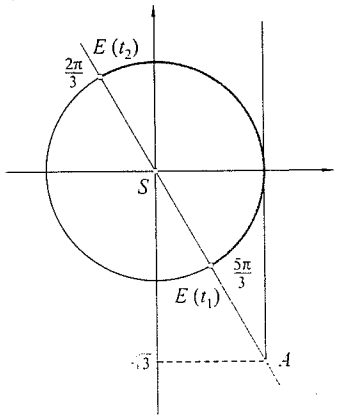


Lako ga je sada i zapisati:
$x \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{R}$.

Primjer 18.

Riješimo na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nejednadžbu: $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 0$.

Rješenje.



I ovaj zadatak možemo riješiti na više načina.

Zapišimo nejednadžbu u obliku $\sin x > -\sqrt{3} \cdot \cos x$. Dvije su mogućnosti. Prva, da je $\cos x > 0$, i tada nakon dijeljenja nejednadžbe dobijemo $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$, i druga kad je $\cos x < 0$ i kad se dobije $\operatorname{tg} < -\sqrt{3}$.

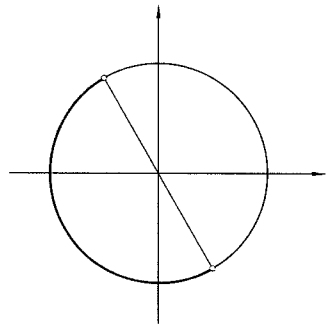
Nacrtajmo brojevnu kružnicu i os tangensa, te na toj osi odredimo točku A kojoj pripada broj $-\sqrt{3}$. Spojimo li točku A i središte brojevne kružnice, ta će spojnica na brojevnoj kružnici odrediti dvije točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ tako da je $\operatorname{tg} t_1 = \operatorname{tg} t_2 = -\sqrt{3}$.

I sada razmatramo svaku od dvije mogućnosti.

U prvoj, kad za $\cos x > 0$ imamo $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$, dobijemo $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\rangle$. A u drugoj, kad je $\cos x < 0$ i $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$, imamo $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\rangle$.

Kad napravimo uniju ovih dvaju rješenja, dobivamo $x \in \left\langle 0, \frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\rangle$ i to je konačno rješenje zadatka.

Druga je mogućnost da proširimo nejednadžbu s $\frac{1}{2}$ nakon čega dobijemo $\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x > 0$. Ovu nejednadžbu dalje možemo zapisati kao $\cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x > 0$, a nakon primjene adicijske formule za sinus, u obliku $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$.



Rješenje ove nejednadžbe na zadanom intervalu je $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$. Tako je konačno rješenje $x \in \left\langle 0, \frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\rangle$.

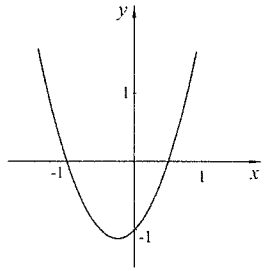
Primjer 19.

Riješimo nejednadžbu: $2\cos^2 x + \cos x \geq 1$.

Rješenje. Ovdje imamo kvadratnu nejednadžbu $2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$.

Zamijenimo li $u = \cos x$, onda s lijeve strane nejednadžbe imamo polinom drugog stupnja $f(u) = 2u^2 + u - 1$.

Skicirajmo njegov graf. S crteža uočavamo da je $f(u) \geq 0$ za sve $u > \frac{1}{2}$ i za $u = -1$. Rješenja su dakle svi oni realni brojevi x, za koje je $\cos x \geq \frac{1}{2}$ ili $\cos x = -1$.



Potražimo konačna rješenja na brojevnoj kružnici. Okomica na os x, pravac $x = \frac{1}{2}$ siječe kružnicu u dvjema točkama, a one su rubovi intervala unutar kojih su rješenja zadatka. Tako dobijemo $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{R}$.

Ovomu treba pridružiti sve x za koje je $\cos x = -1$. To su brojevi $x = (2m+1) \cdot \pi$, $m \in \mathbf{R}$.

11. lekcija Zadaci

Prikažite grafički funkcije:

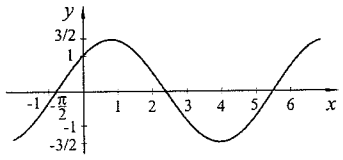
1. $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$;

2. $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

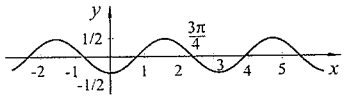
3. $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

4. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

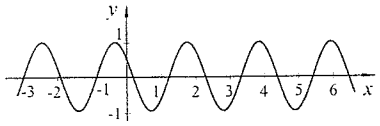
5. Na slici je graf trigonometrijske funkcije $f(x) = a\sin(x - c)$. Odredite a i c.



6. Na slici je graf trigonometrijske funkcije $f(x) = a\cos(bx)$. Odredite a i b.

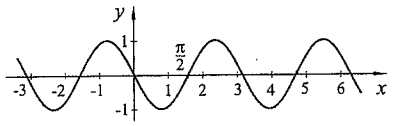


7. Na slici je graf trigonometrijske funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$. Odredite a, b i c.

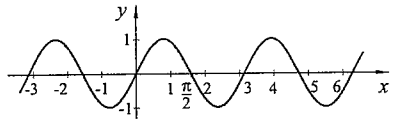


8. Koji je od danih grafova graf funkcije $f(x) = -\sin 2x$?

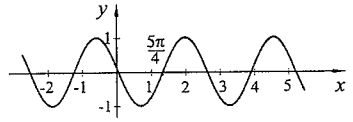
1)



2)

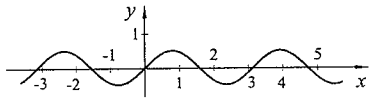


3)

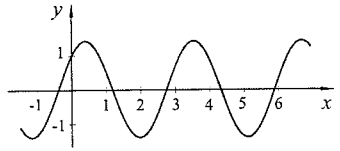


9. Koji je od danih grafova graf funkcije $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 2x$?

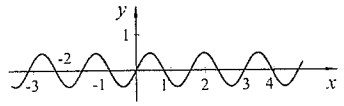
1)



2)

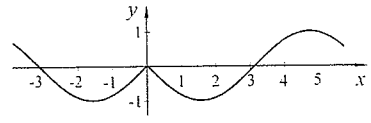


3)

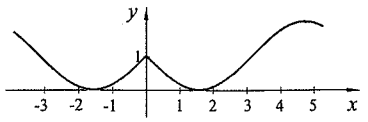


10. Koji je od danih grafova graf funkcije $f(x) = -\sin|x|$?

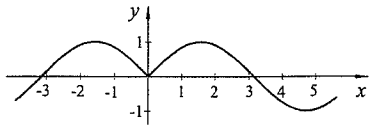
1)



2)

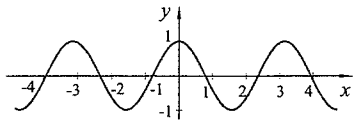


3)

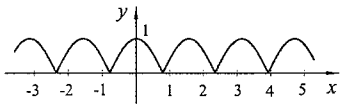


11. Koji je od danih grafova graf funkcije $f(x) = |\cos^2 x - \sin^2 x|$?

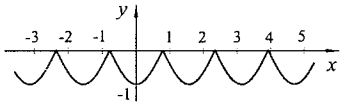
1)



2)



3)



Koliko rješenja ima jednadžba:

12. $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{4}x$;

13. $\cos(2x) = \frac{1}{10}x^2$;

14. $\sin x = 2^x$;

15. $3\cos 3x = \log_2 x$?

Riješite jednadžbe:

16. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

17. $\sin 2x + \sin 4x = 0$;

18. $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$;

19. $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$;

20. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x$;

21. $\cos^2 x - \sin x\cos x - 1 = 0$;

22. $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7$;

23. $4\cos^4 3x + 8 = 11\sin^2 3x$;

24. $\operatorname{tg} 2x = \sin 4x$;

25. $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x - \cos\frac{x}{2}\cdot\sin x = \frac{1}{2}$;

26. $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2x} = 1$;

27. $\cos 3x = 1 + \cos 6x$;

28. $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \sin x\cdot\cos x$;

29. $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$;

30. $\cos 3x = \cos 5x$;

31. $\cos x\cdot\cos 5x = \cos 2x\cdot\cos 6x$.

Riješite nejednadžbe:

32. $\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{x}{3}\right) > 0$;

33. $2\cos(\pi - 2x) > 1$;

34. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \le \sqrt{3}$;

35. $\sin x > \cos x$;

36. $4\sin^2\frac{x}{2} \ge 3$;

37. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$;

38. $2\sin^2 x - 5\cos x \le 4$;

39. $\frac{\cos^2 x - \cos x - 2}{2\cos x + 1} < 0$;

40. $\frac{1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x} \ge 1$;

41. $\sin 3x\cdot\sin x + \cos 3x\cdot\cos x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

42. $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Broj $\frac{3\pi}{4}$ rješenje je jednadžbe $\sin^2 x + a \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$ ako je:

   A. $a = -1$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = \frac{1}{2}$ **D.** $a = 1$

2. Broj rješenja jednadžbe $\sin^2 2x = 1$ koja pripadaju intervalu $[0, 10]$ jednak je:

   A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

3. Rješenje jednadžbe $\sin x + \cos 2x = 1$ koje pripada intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ je broj:

   A. $\frac{2\pi}{3}$ **B.** $\frac{3\pi}{4}$ **C.** $\frac{5\pi}{6}$ **D.** $\frac{7\pi}{6}$

4. Jedno rješenje jednadžbe $4 \sin^2 x + 5 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 0$ ispunjava uvjet:

   A. $20° < x < 25°$ **B.** $25° < x < 30°$ **C.** $30° < x < 35°$ **D.** $35° < x < 40°$

5. Zbroj svih rješenja jednadžbe $\cos 2x + \cos 4x = 1$ na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi \rangle$ jednak je:

   A. 6π **B.** 4π **C.** 2π **D.** 0

6. Asimptote grafa funkcije $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ su pravci:

   A. $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **B.** $x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$

   C. $x = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **D.** $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$

7. Funkcija $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$ definirana je za sve:

   A. $x \in \mathbf{R}$ **B.** $x \in [0, \pi]$ **C.** $x \in \mathbf{Z}$ **D.** $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

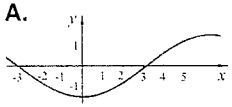
8. Broj nultočaka funkcije $f(x) = 0.1 \cos \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ jednak je:

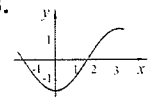
   A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

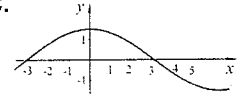
9. Koliko rješenja ima jednadžba $\sin x = x$?

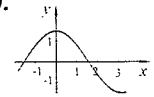
   A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

10. Koji od dana četiri grafa pripada funkciji $f(x) = \frac{3}{2} \sin \frac{1}{2}(x - \pi)$?

    A. 

    B. 

    C. 

    D. 

Ispit 2

1. Broj $\frac{\pi}{8}$ rješenje je jednadžbe $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = a$ ako je:

   A. $a = 8$ **B.** 6 **C.** 4 **D.** 2

2. Broj rješenja jednadžbe $4 \cos^2 2x - 3 = 0$ koja pripadaju intervalu $[-5, 5]$ jednak je:

   A. 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 14

3. Niti jedno rješenje jednadžbe $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ ne pripada intervalu:

   A. $\left\langle \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$ **B.** $\left\langle \pi, \frac{5\pi}{4} \right\rangle$ **C.** $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\rangle$ **D.** $\left\langle \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\rangle$

4. Jedno rješenje jednadžbe $\sin 7x = \sin 3x$ ispunjava uvjet:

   A. $45° < x < 50°$ **B.** $50° < x < 55°$ **C.** $55° < x < 60°$ **D.** $65° < x < 70°$

5. Zbroj svih rješenja jednadžbe $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x$ u intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ jednak je:

   A. 2π **B.** 3π **C.** 4π **D.** 0

6. Asimptote grafa funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$ su pravci:

   A. $x = (2k-1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **B.** $x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z}$

   C. $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **D.** $x = k \cdot 3\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

7. Funkcija $f(x) = \sqrt{\cos^2 2x - \sin^2 2x}$ definirana je za sve:

   A. $x \in \mathbf{R}$ **B.** $(4k-1)\frac{\pi}{8} \le x \le (4k+1)\frac{\pi}{8},\ k \in \mathbf{Z}$

   C. $k\pi < x < (k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ **D.** $(2k-1)\frac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$

8. Koliko rješenja ima jednadžba $\cos x = \log_2 x$?

   A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** beskonačno mnogo

9. Najmanja pozitivna nultočka funkcije $f(x) = -0.5 \cdot \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$ jest:

   A. $\frac{5\pi}{12}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{12}$ **D.** $\frac{7\pi}{12}$

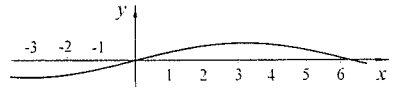
10. Na slici je prikazan graf funkcije:

    A. $\varphi(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$

    B. $\varphi(x) = -\frac{1}{2} \cos x$

    C. $\varphi(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x$

    D. $\varphi(x) = \sin x$



Ispit 3

1. Ako je $x = \frac{\pi}{3}$ jedno rješenje jednadžbe $\sin^2 x - \cos^2 x = a$, $a \in \mathbf{R}$, onda je ta jednadžba ekvivalentna jednadžbi:

   A. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ **B.** $\cos 2x = -\frac{1}{4}$ **C.** $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ **D.** $\cos 2x = -1$

2. Rješenje jednadžbe $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ jest:

   A. $x=(2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **B.** $x=2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **C.** $x=k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **D.** $x=k \cdot \frac{\pi}{2}$

3. Rješenje jednadžbe $2 - \cos(\pi - x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ jest:

   A. $x=(2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **B.** $x=2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **C.** $x=k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **D.** $x=k \cdot \frac{\pi}{2}$

4. Zbroj svih rješenja jednadžbe $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ unutar intervala $[0, 2\pi]$ jednak je:

   A. $\frac{11\pi}{4}$ **B.** $\frac{15\pi}{4}$ **C.** $\frac{13\pi}{4}$ **D.** $\frac{9\pi}{4}$

5. Broj rješenja jednadžbe $\cos 2x = 2^{-x}$ jednak je:

   A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** beskonačan

6. Udaljenost svake dvije susjedne nultočke funkcije $f(x) = 2\cos 3\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ jednaka je:

   A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{12}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$

7. Jednadžba $\sin^4 x + \cos^4 x = a$, gdje je a realni broj, ima rješenja ako je:

   A. $a \leq 1$ **B.** $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ **C.** $a \geq \frac{1}{2}$ **D.** $a \leq \frac{1}{2}$ ili $a \geq 1$

8. Funkcija $f(x) = \sqrt{\cos 2x - 1}$ definirana je za sve:

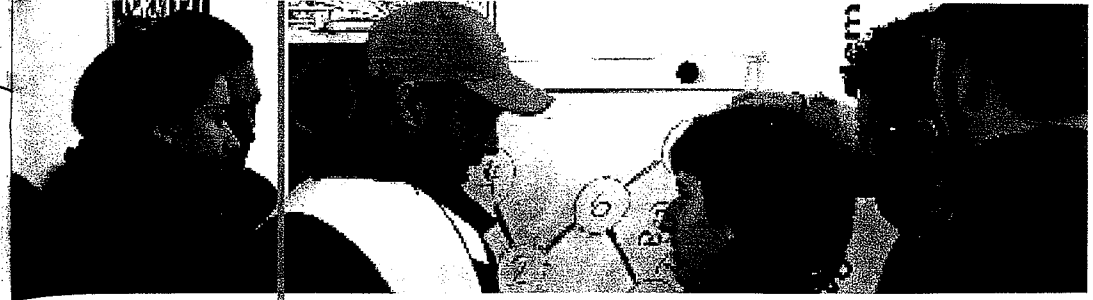
   A. $x \in \mathbf{R}$ **B.** $0 \leq x \leq \pi$ **C.** $k\pi < x < (k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ **D.** $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

9. Rješenje nejednadžbe $\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} < 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$ je:

   A. $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ **B.** $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ **C.** $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ **D.** $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

10. Brojevi $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{7\pi}{3}$ dvije su susjedne nultočke funkcije $f(x) = a\sin bx$. Tada je:

    A. $b = 4$ **B.** $b = \frac{1}{4}$ **C.** $b = 2$ **D.** $b = \frac{1}{2}$



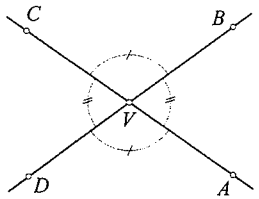
12. lekcija

Planimetrija

12. lekcija Ponovimo

Sukladnost dužina i kutova

Dvije su dužine sukladne ako imaju istu duljinu. Dva su kuta sukladna ako imaju istu mjeru.

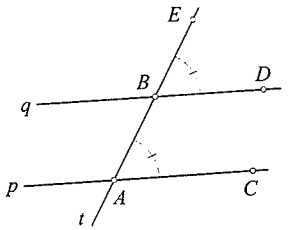


Za dva kuta α i β kažemo da su **komplementarni** ako je $\alpha + \beta = 90°$. Kut α je onda **komplement** kutu β i obratno.

Za dva kuta α i β kažemo da su **suplementarni** ako je $\alpha + \beta = 180°$, tj. α i β zajedno čine ispruženi kut. Kut α tada je **suplement** kutu β i obratno.

Ako su kutovima α i β kraci paralelni, ti su kutovi ili sukladni ili suplementarni.

Poučak o vršnim kutovima. Dva pravca koja se sijeku određuju dva para međusobno sukladnih kutova.

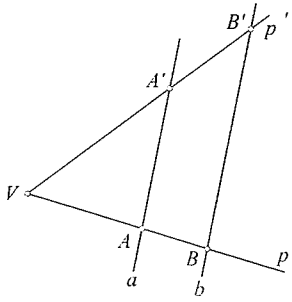


Poučak o kutovima uz presječnicu (transverzalu). Neka su p i q paralelni pravci. Tada pravac t koji ih siječe određuje s njima sukladne kutove. Na slici su sukladni kutovi $\sphericalangle EAC$ i $\sphericalangle EBD$.

Kutovi s okomitim kracima. Ako su kutovima α i β kraci okomiti, ti su kutovi ili sukladni ili suplementarni.

Proporcionalnost dužina

Ako paralele na jednom kraku kuta odsijecaju sukladne dužine, onda one odsijecaju sukladne dužine i na drugom kraku kuta.



Talesov teorem o proporcionalnosti. Neka paralelni pravci a i b sijeku krakove kuta $\sphericalangle pVp'$ u točkama A i A' te B i B'. Onda je:

$$|VA| : |AB| = |VA'| : |A'B'|$$

i

$$|VA| : |VB| = |VA'| : |VB'| = |AA'| : |BB'|.$$

Kraće kažemo: paralelni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine.

Obrat Talesova teorema. Ako dva pravca odsijecaju na krakovima kuta proporcionalne dužine, onda su ti pravci paralelni.

Trokut

Neka su A, B i C tri **nekolinearne** točke (koje ne leže na istom pravcu). Trokut ABC dio je ravnine omeđen dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$.

Poučak o zbroju kutova u trokutu. Zbroj kutova u trokutu jednak je $180°$.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

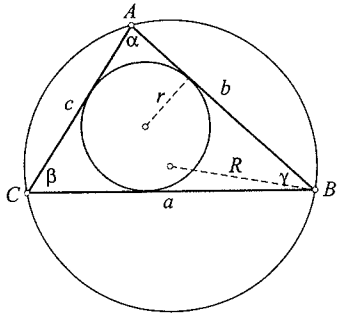
Poučak o vanjskom kutu u trokutu. Vanjski kut u trokutu jednak je zbroju unutarnjih kutova uz preostala dva vrha trokuta.

$$\beta' = \alpha + \gamma.$$

Opseg i površina trokuta.

$$O = a + b + c,$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2} = rs = \frac{abc}{4R},$$



gdje je r polumjer trokutu upisane kružnice, R polumjer trokutu opisane kružnice, a s poluopseg trokuta, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Heronova formula za površinu trokuta.

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Četiri karakteristične točke trokuta

Četiri karakteristične točke trokuta su:

- **središte opisane kružnice** — točka u kojoj se sijeku simetrale stranica trokuta;
- **središte upisane kružnice** — točka u kojoj se sijeku simetrale unutarnjih kutova trokuta;
- **težište** — točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta;
- **ortocentar** — točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta.

Kružnica opisana trokutu. Oko svakog trokuta može se opisati kružnica. Njezino središte je sjecište triju simetrala stranica trokuta.

Kružnica upisana trokutu. Za dani trokut postoji točno jedna kružnica koja dira sve tri njegove stranice. Njezino središte sjecište je triju simetrala kutova trokuta.

Srednjica trokuta je dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta.

Poučak o srednjici trokuta.

1. Dužina koja prolazi polovištem jedne stranice trokuta i paralelna je s drugom stranicom srednjica je trokuta.
2. Srednjica trokuta paralelna je sa stranicom trokuta i dvostruko kraća od nje.

Ortocentar trokuta. Pravci koji sadrže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo **ortocentrom** trokuta.

Dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice naziva se **težišnica**.

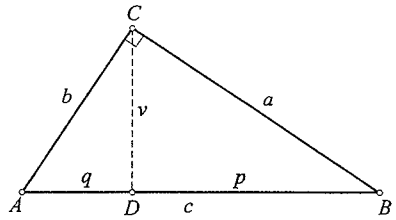
Težište trokuta. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki T koju nazivamo **težištem** trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ gledano od vrha trokuta.

Pravokutni trokut

Pitagorin poučak: $a^2+b^2=c^2$.

Euklidov poučak. Neka je $\triangle ABC$ pravokutni trokut i D nožište visine položene iz vrha C na hipotenuzu. Označimo $p=|BD|$, $q=|AD|$. Onda vrijedi:

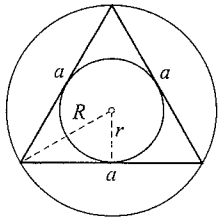
$$a=\sqrt{cp},\quad b=\sqrt{cq},\quad v=\sqrt{pq}.$$



Duljina katete pravokutnog trokuta geometrijska je sredina duljina hipotenuze i odgovarajućeg odsječka.

Duljina visine pravokutnog trokuta geometrijska je sredina duljina odsječaka na hipotenuzi.

Jednakostranični trokut



Za **jednakostranični trokut** vrijedi:

$$v=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sukladnost trokuta

Trokuti su sukladni ako i samo ako imaju sukladne odgovarajuće stranice i sukladne odgovarajuće kutove.

Za stranice i kutove trokuta vrijedi:

1. Nasuprot sukladnim stranicama leže sukladni kutovi: $a=b \implies \alpha=\beta$.
2. Nasuprot sukladnim kutovima leže sukladne stranice: $\alpha=\beta \implies a=b$.
3. Nasuprot većoj stranici leži veći kut: $a>b \implies \alpha>\beta$.
4. Nasuprot većem kutu leži veća stranica: $\alpha>\beta \implies a>b$.

Poučci o sukladnosti trokuta

1. poučak o sukladnosti trokuta: S-S-S

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u svim trima stranicama.

2. poučak o sukladnosti trokuta: S-K-S

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu među njima.

3. poučak o sukladnosti: K-S-K

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u stranici i kutovima uz tu stranicu.

4. poučak o sukladnosti: S-S-K

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu nasuprot duljoj od njih.

Sličnost trokuta

Sličnost trokuta. Kažemo da su dva trokuta ABC i $A'B'C'$ **slična** ako se podudaraju u svim trima kutovima: $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$. Pišemo $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

Temeljno svojstvo sličnih trokuta. Ako su dva trokuta slična, onda su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C' \implies a:a'=b:b'=c:c'.$$

Omjer duljina njihovih stranica:

$$k=\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

zove se **koeficijent sličnosti**.

Poučci o sličnosti trokuta

1. poučak o sličnosti trokuta: S-S-S

Ako su duljine stranica dvaju trokuta proporcionalne, onda su ti trokuti slični:

$$a:a'=b:b'=c:c' \implies \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

2. poučak o sličnosti trokuta: S-K-S
Ako se dva trokuta podudaraju u jednom kutu, a stranice uz taj kut su proporcionalne, onda su ti trokuti slični. Primjerice:

$$\alpha = \alpha', \quad b : b' = c : c' \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

3. poučak o sličnosti trokuta: K-K
Ako se dva kuta dvaju trokuta podudaraju, onda su ti trokuti slični. Primjerice:

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta' \Longrightarrow \triangle ABT \sim \triangle A'B'C'.$$

Svojstvo sličnih trokuta. Neka su trokuti ABC i $A'B'C'$ slični uz koeficijent sličnosti k. Svi elementi trokuta $A'B'C'$ (težišnice, simetrale kutova, visine, polumjeri opisane i upisane kružnice) proporcionalni su odgovarajućim elementima trokuta ABC uz isti faktor proporcionalnosti k.

Ako je $k = 1$, onda su trokuti sukladni.

Opsezi i površine sličnih trokuta

Omjer opsega sličnih trokuta jednak je koeficijentu sličnosti tih trokuta:

$$O' : O = k = a' : a.$$

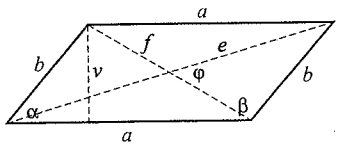
Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica:

$$P' : P = k^2 = a'^2 : a^2.$$

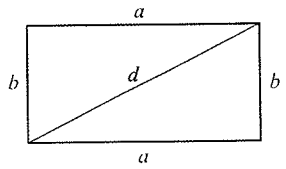
Četverokuti

Zbroj unutarnjih kutova četverokuta iznosi $360°$.

Paralelogram — suprotne stranice su usporedne i jednake, suprotni kutovi jednaki, a dijagonale se raspolavljaju.



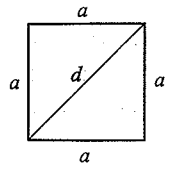
$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2),$$
$$P = av = ab \sin\alpha,$$
$$P = \frac{1}{2} ef \sin\varphi.$$



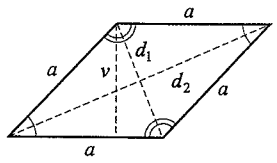
Pravokutnik — svi kutovi su pravi, suprotne stranice su usporedne i jednake i dijagonale su jednake.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
$$P = ab.$$

Kvadrat — sve su stranice jednake, svi su kutovi pravi, dijagonale su jednake i međusobno okomite.



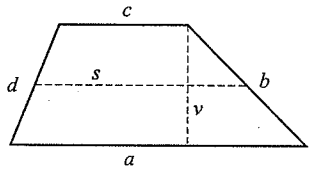
$$d = a\sqrt{2},$$
$$P = a^2.$$



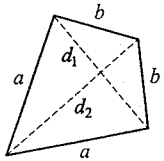
Romb — sve četiri stranice su jednake, suprotne stranice su usporedne, suprotni kutovi jednaki, a dijagonale raspolavljaju kutove romba i međusobno su okomite.

$$P = a \cdot v, \qquad P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Trapez — dvije su suprotne stranice usporedne. Srednjica s, dužina koja spaja polovišta krakova, usporedna je s osnovkama.



$$s = \frac{a + c}{2},$$
$$P = sv, \qquad P = \frac{a + c}{2} v.$$

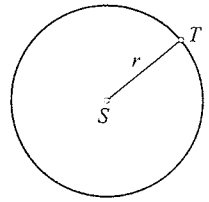


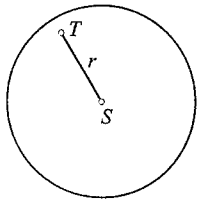
Deltoid — po dvije susjedne stranice jednake su, dijagonale su međusobno okomite.

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Kružnica i krug

Kružica je skup svih točaka ravnine koje su od zadane točke S udaljene za istu udaljenost r. S se naziva **središte** (**centar**) kružnice, a r je **polumjer** (**radijus**) kružnice. Kružnicu označavamo s $k(S, r)$.





Krug je skup svih točaka ravnine čija je udaljenost od točke S manja ili jednaka r. S je **središte** kruga, a r je **polumjer** kruga. Krug označavamo s $K(S, r)$.

Dužina koja spaja dvije točke na kružnici naziva se **tetiva** kružnice (ili kruga). Najdulja je ona tetiva koja prolazi središtem kružnice, a naziva se **promjer (dijametar)** kružnice (ili kruga). Duljina promjera je $d = 2r$.

Opseg kruga O jednak je:

$$O = 2r\pi.$$

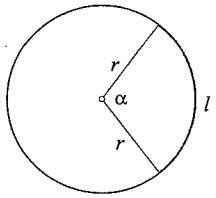
Broj π nije racionalan. Njegova je približna vrijednost $3.14159\ldots$.

Površina kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2\pi.$$

Duljina luka kružnice. Središnjem kutu od α stupnjeva kružnice polumjera r odgovara luk duljine:

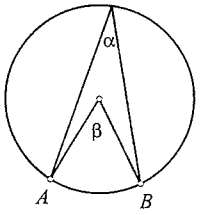
$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}.$$



Kružni isječak. Površina kružnog isječka koji odgovara središnjem kutu od α stupnjeva jednaka je:

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{rl}{2},$$

gdje je l duljina pripadnog luka.



Poučak o obodnom kutu. Neka je $\overset{\frown}{AB}$ luk kružnice, α obodni i β središnji kut nad tim lukom. Onda vrijedi:

$$\beta = 2\alpha.$$

Poučak o obodnim kutovima nad istim lukom.

1. Svi obodni kutovi kružnice nad istim lukom su sukladni.

2. Obodni kutovi koji odgovaraju lukovima jednakih duljina (iste kružnice) sukladni su.

Obrat poučka o obodnom kutu. Sve točke iz kojih se zadana dužina vidi pod istim kutom γ nalaze se na dvama kružnim lukovima sa središnjim kutom 2γ.

Talesov poučak. Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

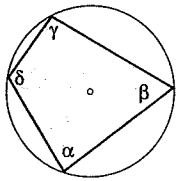
Vrijedi i obrat ovog poučka:

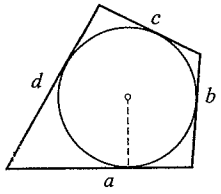
Ako je obodni kut nad tetivom kružnice pravi, tada je ta tetiva promjer kružnice.

Tetivni i tangencijalni četverokut

Za četverokut kažemo da je **tetivni četverokut** ako mu se može opisati kružnica. (Stranice tog četverokuta tetive su kružnice.)

Za četverokut kažemo da je **tangencijalni četverokut** ako mu se može upisati kružnica. (Stranice tog četverokuta tangente su kružnice.)





Četverokut $ABCD$ tetivan je onda i samo onda ako vrijedi:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°.$$

Konveksni četverokut $ABCD$ tangencijalan je onda i samo onda ako za duljine njegovih stranica vrijedi:

$$a + c = b + d.$$

Pravilni mnogokuti

Za svaki prirodni broj n postoji mnogokut koji ima sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake. Taj mnogokut nazivamo **pravilnim mnogokutom** (**pravilni n-terokut, pravilni poligon**).

Poučak o pravilnom n-terokutu. Oko svakog pravilnog mnogokuta može se opisati kružnica. Svakom pravilnom mnogokutu može se upisati kružnica.

Dijagonale i kutovi pravilnog n-terokuta. Broj dijagonala u konveksnom n-terokutu iznosi $\frac{n(n-3)}{2}$. Unutarnji kut pravilnog n-terokuta je $\alpha = \frac{(n-2)180°}{n}$.

Rješavanje raznih zadataka uz pravilni mnogokut najčešće je vezano uz promatranje njegova **karakterističnog trokuta**. Naime, spajanjem središta pravilnog mnogokuta s njegovim vrhovima mnogokut dijelimo na n sukladnih trokuta. Svaki je od njih *karakterističan trokut* mnogokuta.

Neka je $\triangle ABS$ *karakteristični trokut* pravilnog n-terokuta. U njemu je:

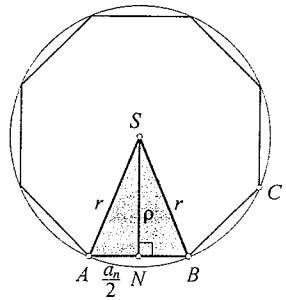
$|AB| = a_n$ duljina stranice mnogokuta,

$|AS| = |BS| = r$ polumjer opisane, a

$|SN| = \rho$ polumjer upisane kružnice.

Nadalje je $\sphericalangle ASB = \frac{360°}{n}$.

Visinom iz vrha S karakteristični je trokut podijeljen na dva sukladna pravokutna trokuta. Pritom je $\sphericalangle ASN = \frac{180°}{n}$.



12. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Duljina stranice trokuta manja je od polovine njegova opsega. Dokažimo!

Rješenje. Prema "nejednakosti trokuta" je $a < b + c$. Dodajmo s obje strane ove nejednakosti a, pa će biti $2a < a + b + c$. Ako sada još podijelimo nejednadžbu s 2, dobit ćemo $a < \frac{a+b+c}{2}$, što se i tvrdilo.

Primijetimo kako je na ovaj način dokazana opća tvrdnja te nejednakost ne treba provjeravati za ostale slučajeve. Naime, opća tvrdnja ne ovisi o izboru oznaka za stranice trokuta.

Primjer 2.

Za kutove trokuta α, β i γ vrijedi $\alpha : \beta = 1 : 2$ i $\beta : \gamma = 4 : 9$. Koliki su ti kutovi?

Rješenje. Zbroj unutarnjih kutova trokuta jednak je $180°$. Iz prvog razmjera izrazimo $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, a iz drugoga $\gamma = \frac{9}{4}\beta$. Sada to uvrstimo u $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ i dobijemo jednadžbu $\frac{1}{2}\beta + \beta + \frac{9}{4}\beta = 180°$.

Slijedi $\beta = 48°$, a zatim $\alpha = 24°$, $\gamma = 108°$.

Zadatak smo mogli i ovako riješiti:

Najprije je $\alpha : \beta = 1 : 2 = 2 : 4$ te možemo zapisati *produženi razmjer* $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 4 : 9$.

Slijedi $\alpha = 2k$, $\beta = 4k$, $\gamma = 9k$, gdje je pozitivan realan broj k koeficijent proporcionalnosti. Odredimo ga iz $15k = 180°$, te je $k = 12°$.

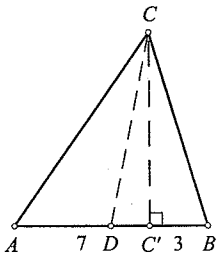
Sada lako odredimo i kutove trokuta.

Primjer 3.

Duljine ortogonalnih projekcija stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ na stranicu $\overline{AB}$ šiljastokutnog trokuta $\triangle ABC$ jednake su 7 cm i 3 cm. Kolika je duljina ortogonalne projekcije težišnice iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$?

Rješenje. Duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je $3 + 7 = 10$ cm. Točka D je polovište stranice $\overline{AB}$, te je $|BD| = 5$ cm.

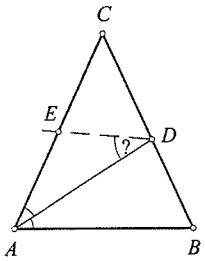
No, onda je duljina ortogonalne projekcije težišnice $\overline{DC'}$ jednaka 2 cm.



Primjer 4.

Vrhom A na osnovici jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ povučena je simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ i ona siječe krak $\overline{BC}$ u točki D. Točkom D položena je težišnica $\overline{DE}$, $E \in \overline{AC}$, trokuta $\triangle ADC$. Ako je kut pri vrhu C trokuta jednak $36°$, koliki je kut $\sphericalangle ADE$?

Rješenje.



Najprije, kut uz osnovicu trokuta jednak je $72°$. Zato je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DCA = 36°$, što znači da je trokut $\triangle ADC$ jednakokračan. No, onda je $\sphericalangle ADC = 108°$ te je $\sphericalangle ADE = 54°$.

Primjer 5.

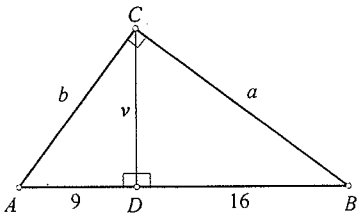
Visina pravokutnog trokuta spuštena iz vrha pravog kuta dijeli hipotenuzu na dva dijela s duljinama 16 i 9. Koliki je zbroj duljina kateta toga trokuta?

Rješenje. Neka je $p = |BD| = 16$ cm i $q = |AD| = 9$ cm. Tada je $c = p + q = 25$ cm pa računamo:

$$a = \sqrt{pc} = \sqrt{16 \cdot 25} = 20 \text{ cm},$$

$$b = \sqrt{qc} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15 \text{ cm}.$$

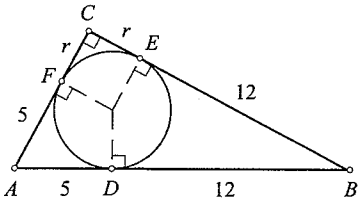
Zbroj duljina kateta ovoga trokuta jednak je $20 + 15 = 35$ cm.



Primjer 6.

Diralište upisane kružnice pravokutnom trokutu dijeli hipotenuzu na dva dijela čije su duljine 5 cm i 12 cm. Kolike su duljine stranica trokuta?

Rješenje.



Neka su D, E i F dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta. Tada je $|AF| = |AD| = 5$ cm i $|BD| = |BE| = 12$ cm.

Zapisat ćemo jednakost:

$$(12+r)^2 + (5+r)^2 = 17^2.$$

Ova jednadžba ekvivalentna je kvadratnoj jednadžbi $r^2+17r-60=0$ čije je pozitivno rješenje $r = 3$ cm. No, onda je $a = 15$ cm, $b = 8$ cm i $c = 5+12 = 17$ cm.

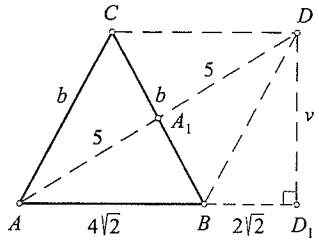
Primjer 7.

Duljina osnovice jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ jednaka je $4\sqrt{2}$ cm, duljina težišnice što pripada kraku trokuta iznosi 5 cm. Kolika je duljina kraka trokuta?

Rješenje. Produžimo težišnicu $\overline{AA_1}$ do točke D tako da dobijemo paralelogram $ABDC$. Sada je $v^2 = |AD|^2 - |AD_1|^2 = 100 - 72 = 28$ te je $v = \sqrt{28}$ cm.

Sada nalazimo $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 = 36$.

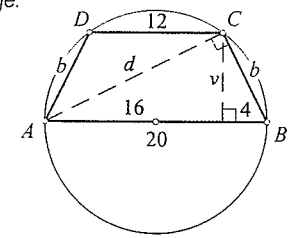
Konačno, $b = 6$ cm.



Primjer 8.

Duljine osnovica trapeza jednake su 12 cm i 20 cm. Središte kružnice opisane trapezu nalazi se na većoj osnovici. Kolika je površina trapeza? Kolika je duljina kraka i kolike su duljine dijagonala trapeza?

Rješenje.



Trokut $\triangle ABC$ je pravokutan (*Talesov poučak*) te je duljina visine trapeza jednaka $v = \sqrt{16 \cdot 4} = 8$ cm (*Euklidov poučak*). Površina trapeza jednaka je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v = 16 \cdot 8 = 128$ cm^2. Prema *Euklidovu poučku* je zatim i $b^2 = 20 \cdot 4$ te $d^2 = 20 \cdot 16$. Slijedi: $b = 4\sqrt{5}$, $d = 8\sqrt{5}$ cm.

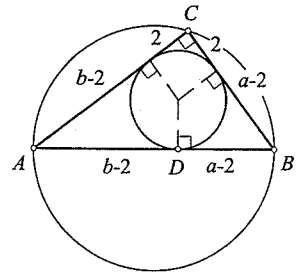
Primjer 9.

Polumjer pravokutnom trokutu upisane kružnice jednak je 2 cm, polumjer opisane kružnice 5 cm. Kolike su duljine stranica ovoga trokuta?

Rješenje. Najprije, $r = 2$, $R = 5$ cm.

Nadalje, $(a-2)+(b-2) = c = 10$ cm, te je $a+b = 14$ cm.

Iz sustava jednadžbi $a+b = 14$ i $a^2+b^2 = 100$ dobijemo $a = 6$ cm, $b = 8$ cm.



Primjer 10.

Jesu li slični trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ ako su duljine stranica prvoga $a = 24.6$ cm, $b = 19.2$ cm, $c = 15$ cm, a duljine stranica drugog $e = 3.2$ cm, $f = 4.1$ cm, $g = 2.5$ cm?

Rješenje. Valja odrediti omjere duljina odgovarajućih stranica dvaju trokuta: $\frac{24.6}{4.1} = \frac{19.2}{3.2} = \frac{15}{2.5} = 6$. Vidimo da su ti omjeri jednaki, dakle, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ slični su s koeficijentom sličnosti $k = 6$.

Primjer 11.

Dva su kuta jednoga trokuta jednaka $52°$ i $80°$, a dva kuta drugoga trokuta $48°$ i $80°$. Jesu li ti trokuti slični?

Rješenje. Da bi dva trokuta bila slična dovoljno je da imaju dva jednaka kuta. U prvome trokutu treći kut je jednak $180° - (52° + 80°) = 48°$.

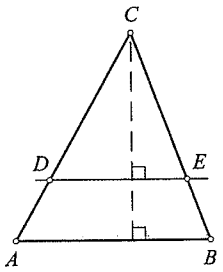
A treći kut drugoga trokuta iznosi $180° - (48° + 80°) = 52°$.

Dva trokuta imaju jednake kutove pa su slična.

Primjer 12.

Visina trokuta spuštena na stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ duga je 10 cm. Na kojoj udaljenosti od stranice $\overline{AB}$ treba položiti paralelu s tom stranicom kako bi trokut njome bio podijeljen na dva dijela jednakih površina?

Rješenje.



Neka je P površina trokuta $\triangle ABC$, a P_1 površina trokuta $\triangle DEC$. Ta su dva trokuta slična te je $k^2 = P : P_1 = 2$. Dakle je $k = \sqrt{2}$.

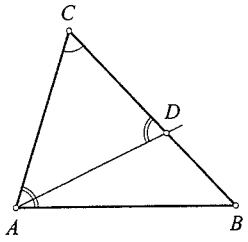
No, zbog sličnosti trokuta proporcionalne su i duljine odgovarajućih visina. Zato je visina manjeg trokuta jednaka $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10 = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$. Dakle, udaljenost pravca od osnovice trokuta jednaka je $d = 10 - 5\sqrt{2} = 5(2 - \sqrt{2})$ cm.

Vrijedi općenito: Ako je v duljina visine trokuta, onda taj trokut treba presjeći pravcem paralelnim stranici na koju je spuštena visina na udaljenosti $\frac{1}{2}v(2 - \sqrt{2})$ od te stranice kako bi trokut bio podijeljen na dva dijela jednakih površina.

Primjer 13.

Vrhom A trokuta $\triangle ABC$ položen je pravac koji siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, tako da je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAB = \alpha$. Ako je $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 16$ cm, koliko je $|CD|$?

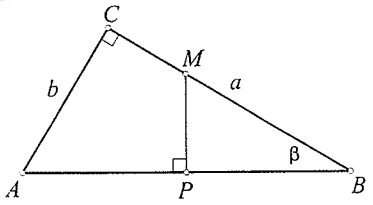
Rješenje. Primijetimo da je $\triangle ADC \sim \triangle ABC$. To su trokuti s jednakim kutovima. Slijedi: $|AC| : |BC| = |CD| : |AC|$, odnosno $12 : 16 = |CD| : 12$, a odatle je $|CD| = 9$ cm.



Primjer 14.

Katete pravokutnog trokuta iznose $a = 5$ i $b = 3$. Okomica povučena polovištem hipotenuze rastavlja taj trokut na jedan četverokut i jedan trokut. Kolika je površina tako dobivenog četverokuta?

Rješenje.



Označimo s P polovište hipotenuze, a s M sjecište visine i katete a. Površina četverokuta $ANMC$ bit će $P(ABC) - P(MBP)$.

Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle MBP$ su slični (podudaraju se u kutu β i pravom kutu), stoga su im odgovarajuće stranice proporcionalne.

Vrijedi:

$$|PB| : a = |MP| : b, \qquad \text{odnosno} \qquad \frac{c}{2} : a = |MP| : b.$$

Iz Pitagorina poučka imamo $c = \sqrt{34}$, te je $|MP| = \frac{3\sqrt{34}}{10}$.

Površine pravokutnih trokuta $\triangle MBP$ i $\triangle ABC$ jednake su:

$$P(MBP) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{34}}{10} \cdot \frac{\sqrt{34}}{2} = \frac{51}{20},$$
$$P(ABC) = \frac{15}{2}.$$

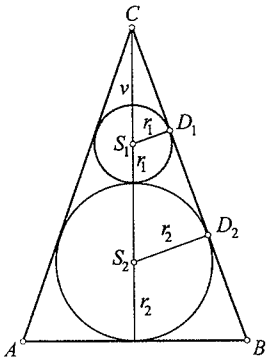
Konačno: $P(APMC) = \frac{15}{2} - \frac{51}{20} = 4.95$.

Primjer 15.

Visina na osnovicu jednakokračnog trokuta iznosi 8 cm, a polumjer trokutu upisane kružnice je 2 cm. Koliki je polumjer kružnice koja dira upisanu kružnicu i krakove trokuta?

Rješenje. Promotrimo slične trokute $\triangle S_2D_2C$ i $\triangle S_1D_1C$ (kut pri vrhu C im je zajednički, kutovi pri vrhovima D_1 i D_2 su pravi, pa su i kutovi pri vrhovima S_1 i S_2 jednaki). Prema tome vrijedi omjer:

$$\frac{|CS_1|}{r_1} = \frac{|CS_2|}{r_2}.$$



Kako je:

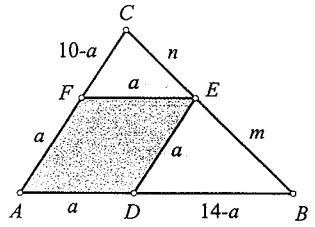
$$|CS_2| = 8 - r_2 = 6,$$
$$|CS_1| = 8 - 2r_2 - r_1 = 4 - r_1,$$

iz gornjeg omjera dobivamo $r_1 = 1$ cm.

Primjer 16.

Trokutu $\triangle ABC$, $|AB| = 14$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AC| = 10$ cm, upisan je romb $ADEF$ čije su dvije stranice $\overline{AD}$ i $\overline{AF}$ na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta, a vrh E na stranici $\overline{BC}$. Odredimo duljine odsječaka na koje točka E dijeli stranicu $\overline{BC}$.

Rješenje.



Najprije uočimo: Ako je a duljina stranice romba, onda je $|FC| = 10 - a$, $|DB| = 14 - a$.

Kako su trokuti $\triangle DBE$ i $\triangle FEC$ slični (Obrazložite!), možemo postaviti razmjer: $(14-a) : a = a : (10-a)$. Odatle slijedi $a = \frac{35}{6}$.

Nadalje, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle FEC$ su slični (Obrazložite!), a koeficijent sličnosti jednak je $k = \frac{|CF|}{|AC|} = \frac{5}{12}$. No, onda je $n = k \cdot |BC| = 5$ cm. Tada je $m = 12 - n = 7$ cm.

Primjer 17.

Trapez s duljinama osnovica 1 i 3 razrezan je dužinom paralelnom s osnovicom, na dva dijela jednakih površina. Odredimo njezinu duljinu.

Rješenje. Neka je x tražena duljina dužine. Ona dijeli početni trapez na dva manja trapeza jednakih površina, odnosno vrijedi:

$$\frac{x+1}{2} \cdot v_1 = \frac{3+x}{2} \cdot v_2,$$

gdje je $v_1 + v_2 = v$ visina trapeza. Osim toga, također vrijedi da je površina početnog trapeza jednaka dvostrukoj površini bilo kojeg manjeg trapeza:

$$2 \cdot \frac{x+1}{2} \cdot v_1 = \frac{3+1}{2} \cdot (v_1 + v_2).$$

Iz prve jednadžbe imamo $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3+x}{x+1}$. Uvrstimo li ovaj izraz u drugu jednadžbu nakon što je podijelimo s v_1, dobivamo jednadžbu s rješenjem:

$$x = \sqrt{5}.$$

Primjer 18.

Točka T dijeli tetivu kružnice na dijelove kojima su duljine 2.4 cm i 1.2 cm. Udaljenost točke T od središta kružnice jednaka je 1.4 cm. Kolika je duljina polumjera kružnice?

Rješenje. Označimo s A i B krajnje točke tetive $\overline{AB}$, sa S središte kružnice. Zadane su duljine $|AT| = 2.4$ cm, $|ST| = 1.4$ cm i $|TB| = 1.2$ cm. Neka je N polovište tetive $\overline{AB}$.

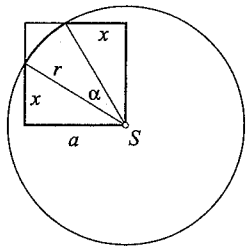
Najprije izračunamo $|SN|^2 = |ST|^2| - |NT|^2 = 1.4^2 - 0.6^2 = 1.6$.

Zatim imamo: $r^2 = |SN|^2 + |AN|^2 = 1.6 + 1.8^2 = 4.84$ te je odatle $r = 2.2$ cm.

Primjer 19.

Iz vrha kvadrata stranice 3 cm opisan je krug polumjera $2\sqrt{3}$ cm. Kolika je površina presjeka kvadrata i kruga?

Rješenje. Površina presjeka jednaka je zbroju površina dvaju pravokutnih trokuta i površine kružnog isječka. Površina trokuta je:



$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2,$$

gdje je $x = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{3}$ cm.

Središnji kut isječka je $\alpha = 30°$ (obrazložite!), pa je površina isječka jednaka:

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360°} = \pi \text{ cm}^2.$$

Konačno, površina presjeka jednaka je $P = 2P_\triangle + P_i = (3\sqrt{3} + \pi)$ cm^2.

Primjer 20.

Koliko dijagonala ima konveksni mnogokut kod kojeg je zbroj unutarnjih kutova 1080°?

Rješenje. Zbroj unutarnjih kutova konveksnog mnogokuta jednak je $K_n = (n-2) \cdot 180°$.

Iz $(n-2) \cdot 180° = 1\,080°$ slijedi $n = 8$. Dakle, riječ je o konveksnom osmerokutu.

Broj dijagonala n-terokuta jednak je $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Osmerokut ima ukupno $D_8 = 20$ dijagonala.

12. lekcija Zadaci

1. Pod kojim kutom simetrala šiljastog kuta jednakokračnog pravokutnog trokuta siječe suprotnu stranicu?

2. Kut pri vrhu jednakokračnog trokuta iznosi $59°26'$. Koliki kut zatvara visina na osnovicu s visinom na krak toga trokuta?

3. Koliki kut zatvaraju simetrale dvaju šiljastih kutova pravokutnog trokuta?

4. Simetrale dvaju unutarnjih kutova trokuta sijeku se pod kutom koji je jednak $\frac{3}{2}$ veličine trećeg kuta. Koliki je taj treći kut?

5. Simetrala kuta uz osnovicu jednakokračnog trokuta siječe krak toga trokuta pod kutom koji je jednak kutu uz osnovicu. Koliki su kutovi ovoga trokuta?

6. Vanjski kut trokuta jednak je $108°$, a veličine dvaju nesusjednih unutarnjih u omjeru su $5 : 4$. Koliki su unutarnji kutovi trokuta?

7. Ako je zbroj dvaju vanjskih kutova trokuta jednak $270°$, taj je trokut pravokutan. Dokažite!

8. Visine na krakove jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ zatvaraju kut od $141°28'$. Koliki su unutarnji kutovi toga trokuta?

9. Trokut $\triangle ABC$ je jednakokračan, $|AB| = |AC|$. Ako težišnica iz vrha A i visina iz vrha B zatvaraju kut od $50°$, koliki su kutovi trokuta $\triangle ABC$.

10. Jedna kateta pravokutnog trokuta od druge je kraća za 14 cm, a od hipotenuze za 18 cm. Kolike su duljine stranica ovoga trokuta?

11. Točka D jednako je udaljena od kateta pravokutnog trokuta $\triangle ABC$, a hipotenuzu $\overline{AB}$ dijeli na dva dijela duljina 30 cm i 40 cm. Kolike su duljine kateta ovoga trokuta?

12. Duljine kateta pravokutnog trokuta u omjeru su $3 : 4$, a duljina hipotenuze iznosi 35 cm. Koliki je opseg ovoga trokuta?

13. Neka su A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica trokuta $\triangle ABC$.

1) Ako je opseg trokuta $\triangle A_1B_1C_1$ jednak 12 cm, koliki je opseg trokuta $\triangle ABC$?

2) Ako je površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka 12 cm^2, kolika je površina trokuta $\triangle A_1B_1C_1$?

14. Za stranice i kutove $\triangle A'B'C'$ vrijedi: $a : a' = b : b' = \frac{3}{2}$ i $\gamma = \gamma'$. Odredite duljine stranica trokuta $\triangle A'B'C'$, ako je $a = 15$ cm, $b = 12$ cm i $c = 7.2$ cm.

15. Duljine stranica trokuta $\triangle ABC$ u omjeru su $3 : 4 : 6$. Polovišta stranica trokuta $\triangle ABC$ vrhovi su trokuta čiji je opseg jednak 39 cm. Kolike su duljine stranica trokuta $\triangle ABC$?

16. Duljine stranica trokuta $\triangle ABC$ jednake su 13 cm, 20 cm i 21 cm. Površina sličnoga trokuta jednaka je 14 cm^2. Kolike su duljine stranica manjeg od ta dva trokuta?

17. Točke A_1, B_1 i C_1 polovišta su stranica trokuta $\triangle ABC$ čije su duljine stranica 6 cm, 8 cm i 10 cm. Kolika je površina trokuta $\triangle A_1B_1C_1$?

18. Jedna je stranica pravokutnika za 1 cm dulja od druge, a od dijagonale ta je stranica kraća za 8 cm. Kolika je površina pravokutnika?

19. Duljine stranica trokuta $\triangle ABC$ redom su jednake: $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm i $|AC| = 7$ cm. Pravac MN položen paralelno stranici $\overline{AC}$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki M, a stranicu $\overline{BC}$ u točki N tako da je $|AM| = |BN|$. Odredite duljinu dužine $\overline{MN}$.

20. Težišnica povučena prema kraku jednakokračnog trokuta duga je 5 cm. Duljina osnovice trokuta iznosi $4\sqrt{2}$ cm. Kolika je duljina kraka?

21. Središte kružnice upisane jednakokračnom trokutu dijeli visinu na osnovicu na dva dijela duljina 3 cm i 5 cm. Kolike su duljine stranica trokuta?

22. Točka D nožište je visine položene na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta $\triangle ABC$. Ako je $|AD| = 3.2$ cm, $|AC| = 4$ cm, kolike su duljine ostalih dviju stranica trokuta?

23. Diralište upisane kružnice pravokutnom trokutu dijeli hipotenuzu na dijelove duljina 3 cm i 10 cm. Kolika je površina trokuta?

24. Duljine polumjera opisane i upisane kružnice pravokutnom trokutu iznose 5 cm i 2 cm. Kolike su duljine stranica trokuta?

25. Jesu li slični trokuti ako su duljine stranica jednoga 9.6 cm, 12.4 cm, 18.8 cm, a duljine stranica drugog 9.3 cm, 14.1 cm, 7.2 cm.

26. Dva su kuta jednoga trokuta jednaka $73°$ i $45°$, a dva kuta drugoga trokuta $45°$ i $62°$. Jesu li ti trokuti slični?

27. Opsezi dvaju sličnih trokuta jednaki su 85 cm i 34 cm. Ako je površina manjeg jednaka 18 cm^2, kolika je površina većeg?

28. Duljine stranica trokuta u omjeru su $3 : 5 : 6$. Duljina najkraće stranice sličnog trokuta jednaka je 15 cm. Kolike su duljine ostalih stranica toga trokuta?

29. Duljine stranica trokuta jednake su $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $c = 24$ cm. Razlika duljina stranicama a i b odgovarajućih stranica sličnoga trokuta iznosi 12 cm. Kolike su duljine stranica toga drugog trokuta?

30. Polovištem visine na osnovicu jednakokračnog trokuta položen je pravac paralelno jednom kraku. Ako je duljina kraka 24 cm, kolika je duljina odsječka te paralele unutar trokuta?

31. Duljine stranica trapeza $ABCD$ jednake su $|AB| = 12$, $|BC| = 5$, $|CD| = 8$ i $|AD| = 6$ cm. Neka je E točka u kojoj se sijeku produžeci krakova trapeza. Kolike su duljine dužina $|DE|$ i $|CE|$?

32. Stranice trokuta duge su 4 cm, 13 cm i 15 cm. Duljina visine na najkraću stranicu sličnog trokuta jednaka je 18 cm. Kolike su duljine stranica drugoga trokuta?

33. U polovištu hipotenuze pravokutnog trokuta podignuta je okomica na hipotenuzu. Kolika je duljina odsječka te okomice unutar trokuta, ako su duljine kateta jednake 12 cm i 16 cm?

34. Stranica $\overline{AC}$ trokuta $\triangle ABC$ podijeljena je na četiri sukladna dijela te su dijelišnim točkama povučene paralele stranici $\overline{AB}$. Ako je $|AB| = 8$ cm, kolike su duljine odsječaka paralelnih pravaca unutar trokuta?

35. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$ podijeljene su na četiri sukladna dijela. Djelišta su potom spojena dužinama čime je trokut $\triangle ABC$ "izrezan" na četiri sloja. Ako je površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka $96\ \text{cm}^2$, kolike su površine slojeva?

36. Jednakokračnom trokutu $\triangle ABC$, $a = |AB| = 6$ cm, $b = |AC| = |BC| = 5$ cm upisan je kvadrat kojem je jedna stranica na kraku $\overline{BC}$ i po jedan vrh na osnovici i na drugom kraku. Kolika je duljina stranice kvadrata?

37. Trokutu $\triangle ABC$ s osnovicom $\overline{AB}$ duljine 18 cm i visinom na tu osnovicu $v = 12$ cm upisan je pravokutnik kojem je jedna stranica trostruko dulja od druge. Kolike su duljine stranica pravokutnika ako jedna njegova stranica leži na stranici $\overline{AB}$ trokuta?

38. Opseg paralelograma jednak je 42 cm, duljine visina paralelograma u omjeru su $2 : 5$. Kolike su duljine stranica paralelograma?

39. Duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta $\triangle ABC$ su 18 cm, odnosno 12 cm. Kolika je duljina stranice romba kojemu je jedan kut ujedno i kut $\sphericalangle CAB$ trokuta, a jedan vrh mu je na stranici $\overline{BC}$ trokuta?

40. Omjer duljina osnovice i kraka jednakokračnog trokta jednak je $4 : 3$. Duljina visine na osnovicu ovoga trokuta iznosi 20 cm. Kolika je duljina polumjera trokutu upisane kružnice?

41. Opseg paralelograma iznosi 30 cm. Simetrala šiljastog kuta paralelograma dijeli dijagonalu na dva dijela čije su duljine 3.2 cm i 8.8 cm. Kolike su duljine stranica paralelograma?

42. Kolika je duljina kružnog luka kojem pripada obodni kut od $105°$, ako je promjer kružnice jednak 30 cm?

43. Trokutu $\triangle ABC$ opisana je kružnica sa središtem u točki S. Ako je $\sphericalangle CAB = 52°$ i $\sphericalangle ASB = 113°$, koliki je kut $\sphericalangle ABC$?

44. Središte jedne kružnice pripada drugoj, a središte druge prvoj kružnici. Ako su krugovi omeđeni tim kružnicama sukladni, kolika je površina njihova zajedničkog dijela?

45. Jednakostraničnom trokutu upisane su tri sukladne kružnice polumjera 1 cm. Kružnice se diraju i međusobno. Kolika je duljina stranice trokuta?

46. Kvadratu sa stranicom duljine 10 cm upisan je krug, a potom su u dijelove kvadrata koji ne pripadaju krugu upisana četiri manja kruga. Izračunajte polumjer jednog manjeg kruga.

47. Dvije se kružnice diraju izvana. Udaljenost središta veće kružnice od sjecišta zajedničkih vanjskih tangenti jednaka je 18 cm. Zbroj duljina polumjera jednak je 12 cm. Koliki su ti polumjeri?

48. Dvije kružnice polumjera 12 cm i 3 cm diraju se izvana. Kolika je površina trokuta što ga zatvaraju tri zajedničke tangente ovih dviju kružnica?

49. Iz točke izvan kružnice, koja je od središta kružnice udaljena d, vidi se pod kutom od $73°30'$ luk kružnice što je dug 13π cm. Kolika je udaljenost d?

12. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Duljina osnovice jednakokračnog trokuta iznosi 30 cm, duljina visine na osnovicu jednaka je 20 cm. Visina na krak ovoga trokuta ima duljinu:

A. 24 cm **B.** 28 cm **C.** 30 cm **D.** 18 cm

2. Opseg pravokutnog trokuta jednak je 40 cm, Njegova je površina $120\ \text{cm}^2$. Duljina hipotenuze ovoga trokuta iznosi:

A. 14 cm **B.** 15 cm **C.** 16 cm **D.** 18 cm

3. Nad stranicama jednakokračnoga pravokutnog trokuta s krakom duljine 6 cm konstruirani su prema van kvadrati. Središta tih kvadrata vrhovi su trokuta čija je površina jednaka:

A. $42\ \text{cm}^2$ **B.** $36\ \text{cm}^2$ **C.** $48\ \text{cm}^2$ **D.** $32\ \text{cm}^2$

4. U pravokutnom trokutu duljina katete je 30 cm, a duljina visine na hipotenuzu 24 cm. Opseg kruga opisanog tom trokutu iznosi:

A. 32π cm **B.** 36π cm **C.** 42π cm **D.** 50π cm

5. Mjere unutarnjih kutova četverokuta u omjeru su $2 : 3 : 5 : 8$. Najveći kut ima mjeru:

A. $100°$ **B.** $120°$ **C.** $140°$ **D.** $160°$

6. Duljina tetive kojoj pripada obodni kut od $30°$ na kružnici polumjera 10 cm iznosi:

A. 5 cm **B.** 5.5 cm **C.** 7.5 cm **D.** 10 cm

7. Površina kružnog vijenca jednaka je četvrtini površine manjeg kruga. Omjer polumjera većeg i manjeg kruga jednak je:

A. $\sqrt{5} : 2$ **B.** $4 : 1$ **C.** $5 : 2$ **D.** $3 : 1$

8. U prvom od dva slična trokuta jedan je kut $78°33'27''$, a u drugom je jednak kut $55°48'53''$. U oba je trokuta jedan kut od:

A. $46°37'40''$ **B.** $45°37'40''$ **C.** $47°35'40''$ **D.** $46°44'52''$

9. Težištem trokuta $\triangle ABC$ povučena je paralela stranici $\overline{AB}$ i ona siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki M, a stranicu $\overline{BC}$ u točki N. Ako je $|AB| = 15$ cm, onda je:

A. $|MN| = 9$ cm **B.** $|MN| = 10$ cm **C.** $|MN| = 12$ cm **D.** $|MN| = 5$ cm

10. Srednjica trapeza duga je 10 cm i njome je trapez podijeljen na dva dijela čije su površine u omjeru $3 : 5$. Duljina kraće osnovice trapeza jednaka je:

A. 5 cm **B.** 6 cm **C.** 4 cm **D.** 3 cm

Ispit 2

1. Duljine stranica trokuta jednake su 5.2 cm, 7.5 cm i 8.3 cm. Kolika je duljina najkraće stranice sličnog trokuta čiji je opseg 52.5 cm?
   A. 11 cm **B.** 12 cm **C.** 13 cm **D.** 14 cm

2. Duljina stranice pravilnog šesterokuta jednaka je a. Zbroj duljina svih njegovih dijagonala iznosi:
   A. $6a(3+\sqrt{3})$ **B.** $6a(2+\sqrt{3})$ **C.** $6a(1+\sqrt{3})$ **D.** $6a\sqrt{3}$

3. Duljina stranice romba jednaka je 13 cm, zbroj duljina dijagonala iznosi 34 cm. Površina romba jednaka je:
   A. 96 cm^2 **B.** 120 cm^2 **C.** 108 cm^2 **D.** 100 cm^2

4. Kutovi četverokuta razlikuju se uzastopce za $20°$. Najveći kut iznosi:
   A. $90°$ **B.** $100°$ **C.** $110°$ **D.** $120°$

5. Dvije kružnice polumjera 3 cm i 4 cm diraju se izvana. Udaljenost središta veće kružnice od sjecišta zajedničkih vanjskih tangenata jednaka je:
   A. 17 cm **B.** 28 cm **C.** 21 cm **D.** 11 cm

6. Duljina stranice jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ jednaka je 12 cm. Pravac paralelelan jednoj stranici odsijeca trokut čija je površina jednaka trećini površine trokuta $\triangle ABC$. Duljina visine malog trokuta jednaka je:
   A. $4\sqrt{3}$ cm **B.** 6 cm **C.** 8 cm **D.** $2\sqrt{3}$ cm

7. Koliko dijagonala ima konveksni mnogokut kojem je zbroj unutarnjih kutova jednak $1080°$?
   A. 18 **B.** 20 **C.** 34 **D.** 16

8. Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$ težišnice su trokuta $\triangle ABC$, točka T njegovo je težište. Neka je N polovište dužine $\overline{AE}$. Ako je $P(\triangle ABC) = k \cdot P(\triangle NET)$, onda je:
   A. $k = 6$ **B.** $k = 8$ **C.** $k = 12$ **D.** $k = 24$

9. Šiljastokutnom trokutu s osnovicom duljine 6 cm i visinom na osnovicu od 12 cm upisan je kvadrat tako da mu je jedna stranica na osnovici trokuta, a ostala dva vrha na dvjema ostalim stranicama trokuta. Stranica kvadrata ima duljinu:
   A. 3 cm **B.** 4 cm **C.** 5 cm **D.** 6 cm

10. Kružnici je opisan jednakokračan trapez s osnovicama duljina 2 cm i 8 cm. Površina tog trapeza jednaka je:
    A. 18 cm^2 **B.** 22 cm^2 **C.** 20 cm^2 **D.** 24 cm^2

Ispit 3

1. Kut pri vrhu jednakokračnog trokuta jednak je $53°18'$. Kut što ga zatvaraju visina na osnovicu i visina na krak ovoga trokuta jednak je:
   A. $36°42'$ **B.** $63°21'$ **C.** $81°44'$ **D.** $76°41'$

2. Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta dijeli hipotenuzu na dijelove duljina 3 cm i 5 cm. Zbroj duljina kateta ovoga trokuta približno je jednak:
   A. 11.22 cm **B.** 12.33 cm **C.** 13.44 cm **D.** 10 cm

3. Duljine stranica trokuta tri su uzastopna parna broja. Površina trokuta jednaka je 24 cm^2. Duljina najkraće stranice iznosi:
   A. 4 cm **B.** 8 cm **C.** 6 cm **D.** 2 cm

4. Duljine kateta pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ jednake su $a = 4$ cm i $b = 6$ cm. Udaljenost vrha B od težišta ovoga trokuta iznosi:
   A. $3.\dot{3}$ cm **B.** 3.5 cm **C.** 2.2 cm **D.** 2.5 cm

5. Pravokutnom trokutu s hipotenuzom duljina 42 cm upisana je kružnica polumjera 8 cm. Opseg ovoga trokuta jednak je:
   A. 88 cm **B.** 100 cm **C.** 120 cm **D.** 150 cm

6. Produženi krakovi $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ trapeza $ABCD$ sijeku se u točki E. Ako su duljine stranica trapeza $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|CD| = 2$ cm i $|AD| = 5$ cm, onda je $|DE| + |CE|$ jednako:
   A. 4 cm **B.** 5 cm **C.** 6 cm **D.** 7 cm

7. Opseg kružnog isječka iznosi 28 cm, njegova je površina 49 cm^2. Duljina kružnog luka koji pripada tom isječku jednaka je:
   A. 11 cm **B.** 12 cm **C.** 13 cm **D.** 14 cm

8. Duljine stranica trokuta $\triangle_1$ jednake su 15 cm, 20 cm i 18 cm, duljine stranica trokuta $\triangle_2$ su 7.5 cm, 12 cm i 9 cm, a duljine stranica trokuta $\triangle_3$ iznose 10 cm, 12 cm i 16 cm. Tada je:
   A. $\triangle_1 \sim \triangle_2$ **B.** $\triangle_1 \sim \triangle_3$ **C.** $\triangle_2 \sim \triangle_3$ **D.** $\triangle_1 \sim \triangle_2 \sim \triangle_3$

9. Točka S središte je kružnice opisane jednakokračnom trokutu $\triangle ABC$ s osnovicom $\overline{AB}$. Ako je $\sphericalangle SAB = 52°38'$, onda je $\sphericalangle CAB$ jednako:
   A. $37°22'$ **B.** $71°19'$ **C.** $74°44'$ **D.** $52°38'$

10. Dan je pravilni peterokut $ABCDE$. Kut pod kojim se sijeku pravci AE i BC jednak je:
    A. $18°$ **B.** $54°$ **C.** $72°$ **D.** $36°$

Ispit 4

1. Visina i težišnica položene iz vrha pravog kuta pravokutnog trokuta zatvaraju kut φ. Veći šiljasti kut toga trokuta jednak je:
   A. $60° + \frac{\varphi}{2}$ **B.** $45° + \frac{\varphi}{2}$ **C.** $90° - \frac{\varphi}{2}$ **D.** 2φ

2. Kvadratu površine $32\ \text{cm}^2$ upisana je i opisana kružnica. Površina kružnog vijenca omeđenoga tim kružnicama jednaka je:
   A. $16\pi\ \text{cm}^2$ **B.** $12\pi\ \text{cm}^2$ **C.** $9\pi\ \text{cm}^2$ **D.** $8\pi\ \text{cm}^2$

3. Osnovica jednakokračnog trokuta duga je 24 cm, duljina kraka iznosi 20 cm. U kojem omjeru središte kružnice upisane ovom trokutu dijeli visinu na osnovicu trokuta?
   A. 2 : 3 **B.** 3 : 4 **C.** 4 : 5 **D.** 3 : 5

4. Duljine ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu pravokutnog trokuta jednake su 18 cm i 32 cm. Površina trokuta jednaka je:
   A. $400\ \text{cm}^2$ **B.** $480\ \text{cm}^2$ **C.** $560\ \text{cm}^2$ **D.** $600\ \text{cm}^2$

5. Duljine stranica trokuta jednake su 4 cm, 13 cm i 15 cm. Duljina visina na najkraću stranicu sličnoga trokuta iznosi 18 cm. Opseg drugog trokuta jednak je:
   A. 36 cm **B.** 24 cm **C.** 48 cm **D.** 32 cm

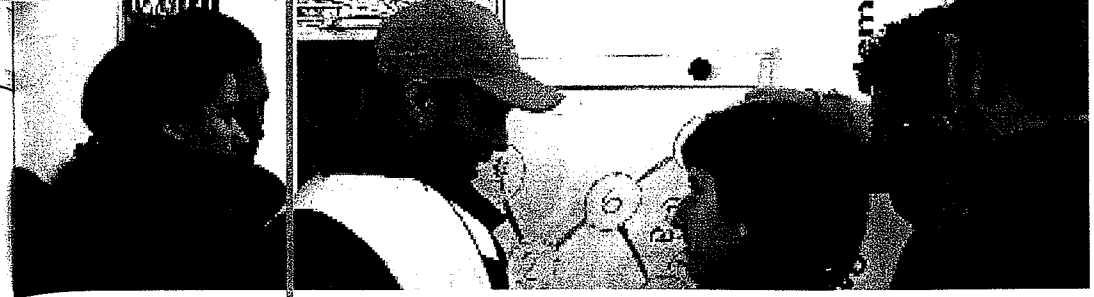
6. Pravac paralelan stranici $\overline{AC}$ trokuta $\triangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Ako je $|AB| = 16$ cm, $|AC| = 20$ cm, $|DE| = 15$ cm, onda je:
   A. $|AD| = 4$ cm **B.** $|AD| = 3$ cm **C.** $|AD| = 6$ cm **D.** $|AD| = 2$ cm

7. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$ sijeku se u točki E. Ako su duljine osnovica trapeza jednake 3 cm i 6 cm te $P(\triangle ABE) = k \cdot P(\triangle CDE)$, onda je:
   A. $k = 2$ **B.** $k = 3$ **C.** $k = 4$ **D.** $k = 8$

8. Na kružnici sa središtem S zadane su redom u pozitivnom smjeru točke A, B, C, D i E. Ako je $\sphericalangle AEB = 40°$ i $\sphericalangle BDC = 50°$, onda je:
   A. $\sphericalangle ASC = 90°$ **B.** $\sphericalangle ASC = 120°$ **C.** $\sphericalangle ASC = 135°$ **D.** $\sphericalangle ASC = 180°$

9. Površina kružnog isječka kružnice kojoj je polumjer jednak 12 cm iznosi $18\pi\ \text{cm}^2$. Duljina luka ove kružnice koji ne pripada isječku iznosi:
   A. 21π cm **B.** 23π cm **C.** 25π cm **D.** 28π cm

10. Duljina kraće dijagonale pravilnog šesterokuta jednaka je 6 cm. Površina šesterokuta jednaka je:
    A. $12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **B.** $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **C.** $18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **D.** $24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



13. lekcija

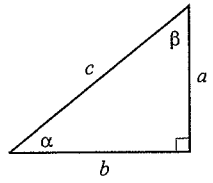
Trigonometrija pravokutnog trokuta

13. lekcija Ponovimo

Definicije trigonometrijskih funkcija

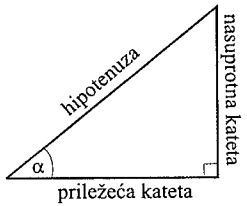
U pravokutnom su trokutu šiljasti kutovi α i β komplementarni, tj. vrijedi:

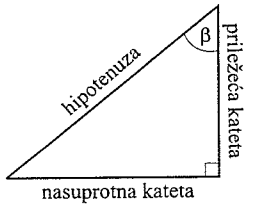
$$\alpha + \beta = 90°.$$



Za njih definiramo trigonomerijske funkcije.

$$\sin \to \frac{\text{nasuprotna}}{\text{hipotenuza}}, \quad \cos \to \frac{\text{priležeća}}{\text{hipotenuza}}, \quad \text{tg} \to \frac{\text{nasuprotna}}{\text{priležeća}}, \quad \text{ctg} \to \frac{\text{priležeća}}{\text{nasuprotna}}.$$





$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad \text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \text{tg}\,\beta = \frac{b}{a}, \quad \text{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}.$$

Odmah uočavamo:

$$\sin\beta = \cos\alpha, \quad \cos\beta = \sin\alpha, \quad \text{tg}\,\beta = \text{ctg}\,\alpha, \quad \text{ctg}\,\beta = \text{tg}\,\alpha.$$

U pravokutnom je trokutu hipotenuza najdulja stranica pa zbog toga za svaki šiljasti kut α uvijek vrijedi:

$$0 < \sin\alpha < 1, \qquad 0 < \cos\alpha < 1.$$

Kažemo da su funkcije sinus i kosinus omeđene, no tangens i kotangens nisu omeđene funkcije. Naime, one su omjeri dviju kateta, a ti omjeri mogu primiti svaku pozitivnu vrijednost.

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30°, 45°, 60°

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

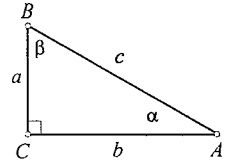
Primjene na pravokutni trokut

Pravokutni se trokut može zadati osnovnim elementima na jedan od četiriju načina:

1. Hipotenuza i jedan šiljasti kut

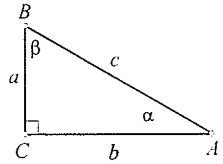
Istaknimo na crtežu elemente koji su zadani: hipotenuzu c i šiljasti kut, recimo, α.

$$\beta = 90° - \alpha,$$
$$a = c \cdot \sin\alpha,$$
$$b = c \cdot \cos\alpha,$$
$$P = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \cdot c^2 \sin\alpha\cos\alpha.$$



2. Kateta i jedan šiljasti kut

Neka je zadana kateta b i kut α. Sličan bi račun vrijedio ako je zadan kut β.

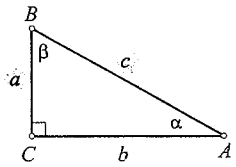


$$\beta = 90° - \alpha,$$
$$a = b \cdot \text{tg}\,\alpha,$$
$$c = \frac{b}{\cos\alpha},$$
$$P = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \cdot b^2 \,\text{tg}\,\alpha.$$

3. Hipotenuza i jedna kateta

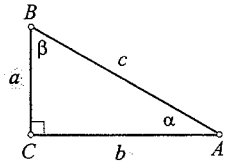
Zadani su hipotenuza c i jedna kateta, recimo, a.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$
$$\beta = 90° - \alpha,$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$
$$P = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{c^2 - a^2}.$$



4. Dvije katete

Zadane su katete a i b.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$
$$\beta = 90° - \alpha,$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$P = \frac{ab}{2}.$$

Primjene u planimetriji

Kružnica opisana trokutu. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i neka je S središte tom trokutu opisane kružnice. Povucimo promjer kružnice s jednim krajem u točki C i neka je njegov drugi kraj točka D. Trokut $\triangle CDB$ pravokutan je te je $\sphericalangle CDB = \alpha$.

Vrijedi:

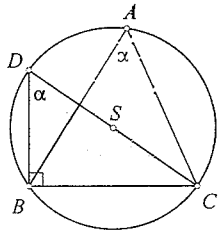
$$|BC| = |CD|\cdot\sin\alpha,$$

odnosno,

$$a = 2r\cdot\sin\alpha.$$

Analogno je:

$$b = 2r\cdot\sin\beta,$$
$$c = 2r\cdot\sin\gamma.$$



Dobivene jednakosti povezuju duljinu stranice trokuta, kut nasuprot toj stranici i polumjer trokutu opisane kružnice.

13. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Omjer duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je $3:5$. Koliki su kutovi toga trokuta?

Rješenje. Možemo uzeti da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} = 0.6$. Tada nalazimo $\alpha = 30°57'50''$. Drugi kut, kut β, izračunamo kao razliku $90° - \alpha$. Slijedi $\beta = 59°2'10''$.

Primjer 2.

Opseg pravokutnog trokuta iznosi 48 cm, jedan je šiljasti kut jednak $55°38'$. Kolika je duljina hipotenuze ovoga trokuta?

Rješenje. Neka je $a + b + c = 48$ i neka je $\alpha = 55°38'$. Uvrstimo li $a = c\cdot\sin\alpha$ i $b = c\cdot\cos\alpha$, dobit ćemo jednadžbu $c\cdot\sin\alpha + c\cdot\cos\alpha + c = 48$. To je linearna jednadžba s jednom nepoznanicom. Slijedi $c = \frac{48}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha} \approx \frac{48}{2.3899} \approx 20.08$ cm.

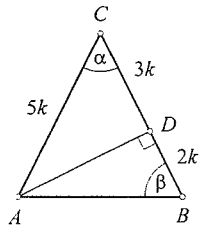
Primjer 3.

Visina na krak jednakokračnog trokuta dijeli krak na dva dijela čije su duljine u omjeru $2:3$. Koliki su kutovi ovog trokuta?

Rješenje. Točka D nožište je visine položene iz vrha A na krak $\overline{BC}$. Pritom je $|BD| : |DC| = 2:3$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle ADC$ imamo $\cos\alpha = 0.6$ te je $\alpha = 53°8'$.

Iz jednakosti $\alpha + 2\beta = 180°$ nalazimo $\beta = 63°26'$.

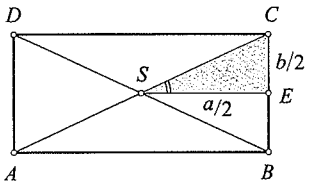
Primijetimo da ovaj zadatak ima dva rješenja. Drugo se dobije iz uvjeta $|BD| : |DC| = 3:2$. Tada je $\alpha = 66°25'$, $\beta = 56°47'$.



Primjer 4.

Površina pravokutnika iznosi 44 cm^2. Dijagonale pravokutnika zatvaraju kut od $\varphi = 48°54'$. Koliki je opseg pravokutnika?

Rješenje.



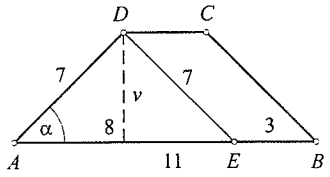
Uočimo pravokutni trokut $\triangle SEC$. U njemu su katete duljina $\frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$ te kut $\sphericalangle CSE = \frac{\varphi}{2} = 24°27'$. Iz toga trokuta slijedi $\frac{b}{2} = \frac{a}{2}\operatorname{tg} 24°27'$ pa iz $P = a^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ dobivamo $a = 9.84$ cm.

No, onda je $b = 4.47$ pa je opseg pravokutnika jednak $o = 2(a+b) = 28.62$ cm.

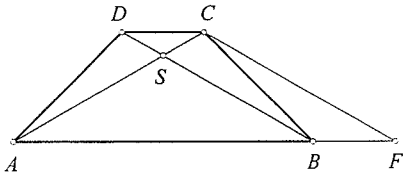
Primjer 5.

Osnovice jednakokračnog trapeza duge su 11 cm i 3 cm, duljina kraka je 7 cm. Koliki kut zatvaraju dijagonale trapeza?

Rješenje. Pravac položen vrhom D trapeza paralelno njegovu kraku $\overline{BC}$ odsijeca od trapeza jednakokračan trokut $\triangle AED$. Pritom je $|AE| = 8$ cm.



Iz $\cos\alpha = \frac{4}{7}$ nalazimo $\alpha = 55°9'$. Nadalje je $v = b \cdot \sin\alpha \approx 5.7$ cm.



Odredimo sada i kut $\sphericalangle ASB$ između dijagonala trapeza. Povucimo vrhom C pravac paralelan dijagonali $\overline{BD}$. Taj pravac siječe produžetak osnovice $\overline{AB}$ trapeza u točki F. Traženi kut $\sphericalangle ASB$ jednak je kutu $\varphi = \sphericalangle ACF$ jednakokračnog trokuta $\triangle AFC$.

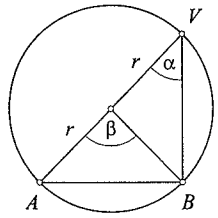
Iz $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{7}{v}$ slijedi $\varphi = 101°15'6''$.

Primjer 6.

Koliki je središnji kut nad tetivom kružnice ako je duljina te tetive jednaka $\frac{3}{4}$ duljine promjera kružnice?

Rješenje. Prema *poučku o obodnom kutu kružnice* svi su obodni kutovi nad danom tetivom s iste njezine strane jednaki. Zbog toga promotrimo onaj obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$ kojemu jedan krak prolazi središtem kružnice.

Trokut $\triangle ABV$ tada će biti pravokutan pa imamo: $\sin\alpha = \frac{|AB|}{2r} = \frac{3}{4}$, a odatle slijedi $\alpha = 48°35'25''$.



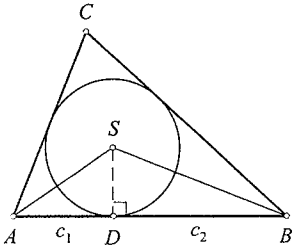
Svakom obodnom kutu kružnice pripada središnji koji je dva puta veći. Tako je $\beta = 97°10'51''$.

No, primijetimo kako zadatak ima još jedno rješenje, kad je vrh obodnog kuta s druge strane tetive $\overline{AB}$. Tada je $\alpha = 131°24'55''$ i $\beta = 262°49'10''$.

Primjer 7.

Dva su kuta trokuta $\alpha = 68°$ i $\beta = 42°$. Polumjer tomu trokutu upisane kružnice jednak je 2.5 cm. Izračunajmo duljinu stranice c ovog trokuta.

Rješenje.



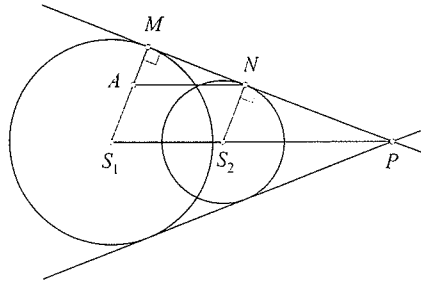
Središte S kružnice upisane trokutu sjecište je simetrala kutova trokuta. Zbog toga je: $\sphericalangle SAB = \frac{\alpha}{2} = 34°$ te $\sphericalangle SBA = \frac{\beta}{2} = 21°$.

Neka je D nožište okomice položene iz S na $\overline{AB}$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle ADS$ je $c_1 = |AD| = 2.5 \cdot \operatorname{ctg} 34° = 3.7$ cm, a iz pravokutnog trokuta $\triangle SDB$ je $c_2 = |DB| = 2.5 \cdot \operatorname{ctg} 21° = 6.5$ cm.

Konačno je $c = c_1 + c_2 = 10.2$ cm.

Primjer 8.

Zajedničke vanjske tangente dviju kružnica polumjera 10 cm i 6 cm sijeku se pod kutom od $\varphi = 42°45'$. Kolika je udaljenost središta ovih dviju kružnica?



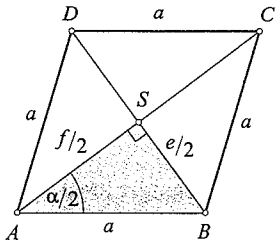
Rješenje. Neka se zajedničke vanjske tangente dviju kružnica sijeku u točki P i neka su M i N dirališta jedne od njih s dvjema kružnicama. Položimo točkom N paralelu s pravcem S_1S_2. Tako dobijemo trokut $\triangle MNA$ u kojem je: $|AM| = r_1 - r_2$ te $\sphericalangle ANM = \frac{\varphi}{2}$.

Iz tog je trokuta $|AN| = |S_1S_2| = \frac{r_1 - r_2}{\sin\frac{\varphi}{2}} \approx 11$ cm.

Primjer 9.

Zbroj duljina dijagonala romba jednak je 28 cm. Opseg romba jednak je 40 cm. Koliki je šiljasti kut romba?

Rješenje.



Dijagonale romba međusobno su okomite. Zbog toga primijenimo *Pitagorin poučak* na trokut $\triangle ABS$: $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$, a odatle dobijemo jednadžbu $e^2+f^2 = 4a^2$ koja s jednadžbom $e+f = 28$ čini sustav simetričnih jednadžbi.

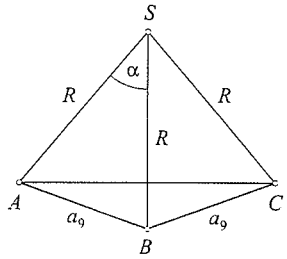
Zamjenom iz linearne jednadžbe dobijemo kvadratnu jednadžbu $e^2 - 28e + 192 = 0$ čija su rješenja 12 i 16 duljine dijagonala romba.

Romb je simetričan prema svojim dijagonalama pa svaka od dijagonala dijeli na sukladne dijelove kut kroz koji prolazi. Zbog toga je: $\sin\frac{\alpha}{2} = 0.6$, odakle slijedi $\alpha = 73°44'23''$.

Primjer 10.

Duljina najkraće dijagonale pravilnoga deveterokuta iznosi 20 cm. Izračunajmo površinu deveterokuta.

Rješenje. Dovoljno je promatrati četverokut $ABCS$ u kojem su A, B i C tri uzastopna vrha deveterokuta, a S njegovo središte. Ili još bolje, promatrajmo jednakokračan trokut $\triangle ACS$. U njemu je $\sphericalangle ASC = 2 \cdot 40° = 80°$. Možemo zaključiti: $R = \frac{\frac{d}{2}}{\sin 40°} \approx 15.56$ cm. Površina karakterističnog trokuta $\triangle ABS$ jednaka je:



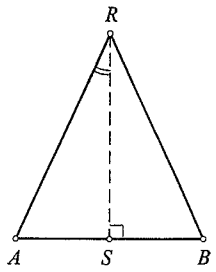
$$P_k = \frac{1}{2}R \cdot \frac{d}{2} = 77.786 \text{ cm}^2.$$

Konačno je $P_9 = 9 \cdot P_k = 700 \text{ cm}^2$.

Primjer 11.

Reflektorom iz helikoptera na visini 30 m iznad površine jezera stožastim snopom svjetlosti obasjava se površina jezera. Ako je kut pri vrhu osnog presjeka tog stošca $50°$, koliki je polumjer osvijetljenog kruga na jezeru?

Rješenje.



Osni presjek stožastog snopa svjetlosti je jednakokračan trokut $\triangle ABR$ s visinom 30 m i kutom od $50°$ pri vrhu.

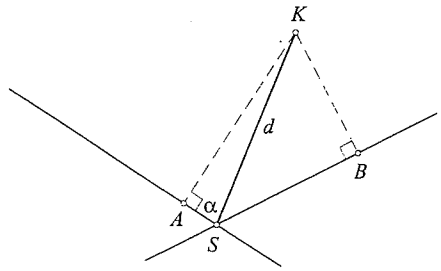
Iz pravokutnog trokuta $\triangle ASR$ slijedi $r = 30 \cdot \text{tg}\, 25° \approx 14$ m.

Primjer 12.

Dvije ravne ceste sijeku se pod kutom od $120°$. Neka je kuća od jedne ceste udaljena 6 km, a od druge 4 km. Kolika je udaljenost te kuće od križanja dviju cesta?

Rješenje. Označimo $\sphericalangle ASK = \alpha$ i $|KS| = d$. Tada iz dvaju pravokutnih trokuta $\triangle ASK$ i $\triangle SBK$ možemo izraziti duljinu d. Za oba trokuta dužina $\overline{KS}$ je hipotenuza i imamo:

$$\frac{6}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin(120° - \alpha)}.$$



Dobili smo jednostavnu trigonometrijsku jednadžbu. Nakon primjene adicijske formule i sređivanja izraza imamo:

$$3\sqrt{3}\cos\alpha + 3\sin\alpha = 4\sin\alpha.$$

Zatim imamo $3\sqrt{3}\cos\alpha = \sin\alpha$, a odatle $\text{tg}\,\alpha = 3\sqrt{3}$.

Nakon što odredimo kut α, iz $d = \frac{6}{\sin\alpha}$ nalazimo $d = 6.11$ km.

13. lekcija Zadaci

1. Izračunajte duljine stranica pravokutnog trokuta, ako mu je opseg jednak 30 cm, a jedan kut iznosi $64°30'$.

2. Izračunajte duljine stranica pravokutnog trokuta, ako mu je površina jednaka 42 cm^2, a veličina jednoga kuta iznosi $46°45'$.

3. Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 2 cm. Razlika šiljastih kutova toga trokuta iznosi $11°24'$. Kolika je duljina druge katete ovoga trokuta?

4. Kolika je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta ako je duljina visine na hipotenuzu 11 cm, a $\beta = 48°50'$?

5. Nožište visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta dijeli hipotenuzu na dijelove čije su duljine u omjeru $2 : 5$. Koliki su kutovi trokuta?

6. Polumjer kružnice upisane pravokutnom trokutu iznosi 3 cm, razlika šiljastih kutova trokuta jednaka je $31°$. Koliki je polumjer opisane kružnice tomu trokutu?

7. Razlika duljina kraka i osnovice jednakokračnog trokuta iznosi 3 cm, kut nasuprot osnovici ima $44°20'$. Kolika je površina toga trokuta?

8. Opseg jednakokračnog trokuta jednak je 33 cm, a veličina kuta nasuprot osnovici je $43°$. Kolika je površina toga trokuta?

9. Površina jednakokračnog trokuta iznosi 30 cm^2. Kut nasuprot osnovici jednak je $104°$. Koliki je opseg ovoga trokuta?

10. Razlika kuta uz osnovicu i kuta pri vrhu jednakokračnog trokuta iznosi $12°$, krak je dulji od osnovice za 3 cm. Kolika je površina ovoga trokuta?

11. Polumjer jednakokračnom trokutu opisane kružnice dug je 5 cm. Kut uz osnovicu trokuta iznosi $65°$. Koliki je polumjer tomu trokutu upisane kružnice?

12. Kolika je duljina tetive kružnice polumjera 5 cm, ako toj tetivi pripada obodni kut od $112°$?

13. Iz točke P vidi se luk kružnice dug 5.2 cm. Ako je polumjer kružnice jednak 4.5 cm, kolika je udaljenost točke P od središta kružnice?

14. Nad tetivom $\overline{AB}$ duljine 6 cm nalazi se obodni kut od $53°$. U točkama A i B konstruiraju se tangente na kružnicu i one se sijeku u točki P. Koliko je točka P udaljena od središta kružnice?

15. Kružnici polumjera 4 cm upisan je trokut ABC. Ako je $b = 6$ cm, $\alpha = 70°10'$, odredite duljinu stranice c i kut γ.

16. Kolika je površina pravilnog 12-erokuta opisanog kružnici polumjera 10 cm?

17. Površina pravilnog 9-erokuta iznosi 108 cm^2. Izračunajte duljinu polumjera kružnice opisane tomu 9-erokutu.

13. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Hipotenuza pravokutnog trokuta četiri je puta dulja od jedne katete. Razlika šiljastih kutova ovoga trokuta jednaka je:

A. $50°31'$ **B.** $61°3'$ **C.** $47°25'$ **D.** $55°23'$

2. Duljina hipotenuze c pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ jednaka je 12 cm te je $\operatorname{tg}\alpha = 1.5$. Zbroj duljina kateta ovoga trokuta iznosi:

A. 15.4 cm **B.** 18.3 cm **C.** 21.7 cm **D.** 16.64 cm

3. Duljine stranica pravokutnika jednake su 12 cm i 8 cm. Kut što ga zatvaraju dijagonale jednak je:

A. $61°18'$ **B.** $42°32'$ **C.** $58°45'$ **D.** $67°23'$

4. Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta dijeli hipotenuzu na dijelove čije su duljine u omjeru $12 : 25$. Veći šiljasti kut ovoga trokuta iznosi:

A. $55°17'$ **B.** $58°50'$ **C.** $61°22'$ **D.** $65°34'$

5. Iz točke A na ravnom tlu vrh tornja se vidi pod kutom od $30°$. Ako se približimo tornju za 10 m do točke B, njegov vrh se vidi pod kutom od $45°$. Točke A, B i C nalaze se na jednom pravcu. Visina tornja jednaka je:

A. 12.5 m **B.** $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ m **C.** $6\sqrt{5}$ m **D.** $\frac{10}{\sqrt{3}-1}$ m

6. Omjer duljina visine na osnovicu i visine na krak jednakokračnog trokuta jednak je $5 : 2$. Kut nasuprot osnovici ovoga trokuta iznosi:

A. $23°4'$ **B.** $34°5'$ **C.** $45°6'$ **D.** $56°7'$

7. Polumjer kružnice jednak je 15 cm. Kolika je duljina luka kružnice koji se vidi iz točke u istoj ravnini ako je ta točka od središta kružnice udaljena 20 cm?

A. 19.55 cm **B.** 21.68 cm **C.** 25.25 cm **D.** 31.15 cm

8. Ortogonalna projekcija dužine $\overline{AB}$ na pravac p duga je 11 cm. Ako je $|AB| = 13$ cm, kut između pravaca AB i p jednak je:

A. $32°12'$ **B.** $28°13'$ **C.** $18°22'$ **D.** $35°45'$

9. Ako središnjem kutu α kružnice k pripada tetiva duljine t, onda je duljina tetive koja pripada središnjem kutu 2α na istoj kružnici jednaka:

A. $2t\cos\alpha$ **B.** $2t\sin\frac{\alpha}{2}$ **C.** $2t\sin\alpha$ **D.** $2t\cos\frac{\alpha}{2}$

10. Opseg romba je 34 cm, a njegova površina jednaka je 60 cm^2. Šiljasti kut romba jednak je:

A. $62°15'$ **B.** $48°44'$ **C.** $56°9'$ **D.** $70°$

Ispit 2

1. Jedna je kateta pravokutnog trokuta tri puta kraća od druge. Razlika šiljastih kutova ovoga trokuta jednaka je:
   A. $48°34'$ **B.** $53°8'$ **C.** $58°35'$ **D.** $36°47'$

2. Zbroj duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je 17.5 cm, duljina hipotenuze je 12.5 cm. Veći šiljasti kut toga trokuta jednak je:
   A. $53°8'$ **B.** $55°17'$ **C.** $50°420'$ **D.** $48°35'$

3. Duljina visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta jednaka je 15 cm, jedan šiljasti kut trokuta iznosi $66°44'$. Duljina hipotenuze jednaka je:
   A. 35.21 cm **B.** 43.5 cm **C.** 39.8 cm **D.** 41.3 cm

4. Postave li se ljestve prema zidu tako da s tlom zatvaraju kut od $60°$, one dosežu do visine od 6.5 m. Ako želimo da dosegnu visinu od 7 metara, za koliko se mora povećati prikloni kut?
   A. $8°51'$ **B.** $15°$ **C.** $12°27'$ **D.** $13°43'$

5. Omjer duljina osnovice i kraka jednakokračnog trokuta jednak je $3 : 8$. Kut nasuprot osnovici toga trokuta jednak je:
   A. $32°15'$ **B.** $25°43'$ **C.** $21°37'$ **D.** $40°13'$

6. Površina pravokutnika jednaka je $72\ \text{cm}^2$, dijagonale pravokutnika zatvaraju kut od $53°$. Opseg pravokutnika jednak je:
   A. 24 cm **B.** 36 cm **C.** 34.3 cm **D.** 32 cm

7. Točka A i B s raznih su strana pravca p, prva je od pravca udaljena 7 cm, druga 13 cm. Kut između dužine $\overline{AB}$ i pravca p jednak je $14°33'$. Duljina ortogonalne projekcije dužine $\overline{AB}$ na pravac p jednaka je:
   A. 44 cm **B.** 55 cm **C.** 66 cm **D.** 77 cm

8. Visine položene iz vrha D romba $ABCD$ na njegove stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ zatvaraju kut od $40°$. Ako je duljina stranice romba jednaka 15 cm, duljina dulje dijagonale romba iznosi:
   A. 28.2 cm **B.** 18.5 cm **C.** 24.4 cm **D.** 22 cm

9. Duljina dijagonale pravilnog peterokuta jednaka je 24 cm. Njegova je površina jednaka:
   A. $385.2\ \text{cm}^2$ **B.** $378.5\ \text{cm}^2$ **C.** $324.5\ \text{cm}^2$ **D.** $350.8\ \text{cm}^2$

10. Kružnici polumjera r opisan je jednakokračan trapez s unutarnjim kutom α. Opseg toga trapeza jednak je:
    A. $\dfrac{4r^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ **B.** $\dfrac{8r}{\sin\alpha}$ **C.** $\dfrac{4r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ **D.** $\dfrac{2r^2}{\operatorname{tg}\alpha}$

Ispit 3

1. Ako je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta 25 cm, a $\operatorname{tg}\alpha = 0.75$, onda je zbroj duljina kateta toga trokuta jednak:
   A. 30 cm **B.** 35 cm **C.** 40 cm **D.** 45 cm

2. Omjer duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je $5 : 11$. Veći šiljasti kut ovoga trokuta iznosi:
   A. $56°33'$ **B.** $65°33'$ **C.** $72°27'$ **D.** $49°44'$

3. Površina pravokutnog trokuta jednaka je $28\ \text{cm}^2$, razlika mjera njegovih šiljastih kutova iznosi $33°16'$. Zbroj duljina kateta ovoga trokuta iznosi:
   A. 11.25 cm **B.** 13.6 cm **C.** 15.7 cm **D.** 17.2 cm

4. Duljina osnovice $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta iznosi 16 cm, duljina krakova $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ je 17 cm. Kut što ga zatvaraju težišnica iz vrha A i visina iz vrha C toga trokuta iznosi:
   A. $48°15'$ **B.** $58°$ **C.** $50°$ **D.** $62°$

5. Stranica $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ točkama D i E podijeljena je na tri sukladna dijela. Kut $\varphi = \sphericalangle DCE$ jednak je:
   A. $33°15'$ **B.** $21°47'$ **C.** $40°24'$ **D.** $28°46'$

6. Dijagonala pravokutnika duga je d cm, kut između dijagonala jednak je α. Površina pravokutnika iznosi:
   A. $P = \dfrac{d^2}{2}\cdot\cos\alpha$ **B.** $P = \dfrac{d^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$ **C.** $P = \dfrac{d^2}{2}\cdot\sin\alpha$ **D.** $P = \dfrac{d^2}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$

7. Duljine osnovica jednakokračnog trapeza jednake su 15 cm i 5 cm, duljina kraka je 11 cm. Šiljasti kut ovog trapeza iznosi:
   A. $57°33'$ **B.** $71°35'$ **C.** $68°46'$ **D.** $62°58'$

8. Središte kružnice leži na hipotenuzi pravokutnog trokuta i dira obje njegove katete. Ako je hipotenuza središtem podijeljena na dijelove čije su duljine u omjeru $4 : 5$, veći kut trokuta jednak je:
   A. $62°45'$ **B.** $55°36'$ **C.** $51°20'$ **D.** $47°15'$

9. Duljina tetive kojoj pripada obodni kut od $44°$ s vrhom na kružnici polumjera 10 cm jednaka je:
   A. 11.8 cm **B.** 12.5 cm **C.** 13.9 cm **D.** 14.7 cm

10. Duljina polumjera trokutu opisane kružnice jednaka je 8 cm. Dva su kuta trokuta $36°25'$ i $58°47'$. Duljina najdulje stranice trokuta iznosi:
    A. 18.5 cm **B.** 22 cm **C.** 25.5 cm **D.** 16 cm

Ispit 4

1. U pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ je $\sin\alpha = \frac{3}{8}$ i $b = 15$ cm. Duljina hipotenuze c ovoga trokuta jednaka je:
   A. 15.5 cm **B.** 16.2 cm **C.** 17.6 cm **D.** 18.3 cm

2. Duljina jedne katete pravokutnog trokuta jednaka je 11 cm, šiljasti kut uz tu katetu iznosi $63°10'$. Odsječak okomice položene na hipotenuzu u njezinu polovištu, a koji je unutar trokuta, dug je:
   A. 5.12 cm **B.** 4.55 cm **C.** 7.15 cm **D.** 6.16 cm

3. Razlika duljina kraka i osnovice jednakokračnog trokuta jednaka je 2 cm. Kut nasuprot osnovici jednak je $45°$. Opseg trokuta jednak je:
   A. 23.6 cm **B.** 25.6 cm **C.** 27.6 cm **D.** 29.6 cm

4. Točka P polovište je stranice $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$. Pravci PC i BD sijeku se pod kutom od:
   A. $65°15'$ **B.** $75°32'$ **C.** $71°34'$ **D.** $68°52'$

5. Duljine stranica paralelograma su 12 cm i 7 cm, šiljasti kut jednak je $68°50'$. Duljina kraće dijagonale ovoga paralelograma iznosi:
   A. 13.56 cm **B.** 18.8 cm **C.** 9.92 cm **D.** 11.5 cm

6. Dijagonale romba duge su 10 cm i 13 cm. Mjera tupog kuta romba iznosi:
   A. $108°10'$ **B.** $104°52'$ **C.** $112°14'$ **D.** $116°42'$

7. Duljine osnovica jednakokračnog trapeza jednake su 7 cm i 3 cm, a šiljasti kut trapeza iznosi $72°$. Površina toga trapeza jednaka je:
   A. 30.8 cm^2 **B.** 33.5 cm^2 **C.** 36.8 cm^2 **D.** 40.6 cm^2

8. Polumjer kružnice opisane jednakokračnom trokutu je 10 cm. Kut uz osnovicu trokuta iznosi $72°18'$. Duljina polumjera tomu trokutu upisane kružnice jednaka je:
   A. 5.44 cm **B.** 4.66 cm **C.** 4.23 cm **D.** 3.55 cm

9. Tetiva kružnice duga je 15 cm i od središta kružnice udaljena je 3 cm. Veći obodni kut nad tom tetivom iznosi:
   A. $158°12'$ **B.** $132°38'$ **C.** $111°48'$ **D.** $105°15'$

10. Duljina najkraće dijagonale pravilnog osmerokuta kojem je stranica duga 15 cm iznosi:
    A. 25.14 cm **B.** 27.7 cm **C.** 36.43 cm **D.** 31.56 cm

14. lekcija

Površina trokuta i primjene trigonometrije

14. lekcija Ponovimo

Poučak o sinusima. Poučak o kosinusu

Poučak o sinusima. U svakom su trokutu omjeri duljina stranica i sinusa tim stranicama suprotnih kutova jednaki:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Te jednakosti možemo napisati u obliku produženog razmjera:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Pri rješavanju zadataka vezanih uz trokut, iz nekih njegovih poznatih osnovnih elemenata (stranica i kutova) moramo odrediti preostale. U sljedećim slučajevima ostale elemente trokuta možemo odrediti primjenom poučka o sinusima.

a) zadana je stranica i dva kuta,

b) zadane su dvije stranice i kut nasuprot većoj od njih.

Poučak o kosinusu. Kvadrat stranice u trokutu jednak je zbroju kvadrata drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki umnožak tih stranica i kosinusa kuta između njih:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Primjenom poučka o kosinusu rješavamo preostale dvije mogućnosti zadavanja trokuta:

c) zadane su dvije stranice i kut među njima,

d) zadane su tri stranice.

Trigonometrija trokuta

Površina trokuta jednaka je polovici umnoška dviju stranica i sinusa kuta između njih:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Površina trokuta kojemu poznajemo kutove i jednu stranicu jednaka je:

$$P = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

Ako su poznate stranice trokuta, njegovu površinu računamo **Heronovom formulom**:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ poluopseg trokuta.

Poučak o sinusima i polumjer opisane kružnice. U svakom su trokutu omjeri duljina stranica i sinusa tim stranicama suprotnih kutova jednaki promjeru trokutu opisane kružnice:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Površina trokuta može se dobiti iz polumjera upisane kružnice i poluopsega:

$$P = rs.$$

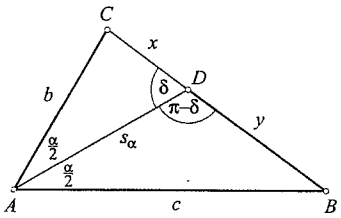
Ako su poznate stranice trokuta te polumjer opisane kružnice, onda vrijedi:

$$P = \frac{abc}{4R}.$$

Poučak o simetrali kuta.

Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli suprotnu stranicu u omjeru jednakom omjeru duljina stranica što zatvaraju taj kut:

$$x : y = b : c.$$



Četverokut

Dijagonale i stranice paralelograma. Između duljina dijagonala i stranica paralelograma vrijedi relacija:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Površinu paralelograma računamo preko duljina njegovih stranica i kuta među njima:

$$P = ab\sin\alpha,$$

ili preko duljina dijagonala i kuta među njima:

$$P = \frac{1}{2}ef\sin\varphi.$$

Površinu bilo kojeg četverokuta možemo izračunati ako mu poznajemo duljine dijagonala i kut među njima.

Površina četverokuta jednaka je polovici umnoška duljina dijagonala i sinusa kuta između njih.

14. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Veličine kutova u trokutu u omjeru su $3:4:8$. Koliki je omjer duljina najdulje i najkraće stranice toga trokuta?

Rješenje. Neka je $\alpha:\beta:\gamma = 3:4:8$. Tada možemo pisati $\alpha = 3k$, $\beta = 4k$, $\gamma = 8k$, gdje je realni pozitivni broj k koeficijent proporcionalnosti. No, zbroj kutova u trokutu jednak je $\alpha+\beta+\gamma = 15k = 180°$ i slijedi $k = 12°$.

Dakle je $\alpha = 36°$, $\beta = 48°$, $\gamma = 96°$. Omjer najkraće i najdulje stranice trokuta, prema *poučku o sinusima*, jednak je $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \approx 3:5$.

Primjer 2.

Za duljine stranica trokuta $\triangle ABC$ vrijedi $a:b = 2:3$ i $b:c = 4:5$. Koliki je najveći kut ovoga trokuta?

Rješenje. Primijetimo da danim omjerima duljina stranica trokut nije jednoznačno određen. No, njima je određen skup trokuta koji su međusobno slični pa su oni dostatni za određivanje kutova trokuta.

Možemo zapisati $a:b = 8:12$ i $b:c = 12:15$ pa tako dobijemo produženi razmjer: $a:b:c = 8:12:15$. Zbog prethodnog obrazloženja možemo uzeti $a = 8$, $b = 12$, $c = 15$. Najveći kut trokuta nasuprot je najduljoj stranici, to je kut γ. Sada primijenimo *poučak o kosinusu*: $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\frac{17}{192}$. Odatle nalazimo: $\gamma = 95°4'47''$.

Primjer 3.

Opseg trokuta jednak je 55 cm, dva su njegova kuta $\alpha = 46°27'$ i $\beta = 63°15'$. Kolika je površina ovoga trokuta?

Rješenje. Iz jednakosti $a\sin\gamma = c\sin\alpha$ i $b\sin\gamma = c\sin\beta$ (*poučak o sinusima*) izrazimo duljine stranica a i b te tako dobijemo jednadžbu s jednom nepoznanicom: $55 = c\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + 1\right)$. Njezino je rješenje $c = 20.23$ cm.

Površinu trokuta možemo sada izračunati iz formule:

$$P = \frac{c^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\gamma} = 140.7\ \text{cm}^2.$$

Primjer 4.

Duljine stranica trokuta zadovoljavaju uvjet $\frac{(b+c)^2-a^2}{bc} = 1$. Koliki je kut α?

Rješenje. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$a^2 = (b+c)^2 - bc = b^2+c^2+bc,$$

a kosinusov poučak za stranicu a i kut α glasi:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Rješenje ovog sustava je $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, odnosno $\alpha = 120°$.

Primjer 5.

Duljine stranica trokuta tri su uzastopna cijela broja, najveći je kut trokuta dva puta veći od najmanjeg. Koliki je opseg toga trokuta?

Rješenje. Neka su duljine stranica trokuta jednake $n-1$, n, $n+1$ i neka je nasuprot najmanjoj stranici kut α. Prema *poučku o sinusima* imamo:

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha.$$

Dakle, $\cos\alpha = \frac{n+1}{2(n-1)}$. Primijenimo sada poučak o kosinusima pa imamo:

$$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\frac{n+1}{2(n-1)}.$$

Nakon provođenja algebarskih operacija iz posljednje jednakosti dobit ćemo $n = 5$. Stranice trokuta, dakle, imaju duljine 4, 5 i 6 (jedinica duljine) pa je opseg trokut 15.

Primjer 6.

Duljina polumjera trokutu opisane kružnice jednaka je 15 cm, duljina stranice a je 22 cm, a $\beta = 52°$. Kolika je površina ovoga trokuta?

Rješenje. Najprije iz poučka $a = 2R\sin\alpha$ izračunamo kut α. Dobijemo $\alpha = 47°10'$. Kako je zbroj kutova u trokutu jednak $180°$, onda je $\gamma = 80°50'$.

Površinu trokuta možemo izračunati formulom $P = \frac{a^2\sin\gamma\sin\beta}{2\sin\alpha}$. Tako dobijemo: $P = 256.7\ \text{cm}^2$.

No, primijetimo da smo površinu mogli računati i pomoću formule:

$$P = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Tu formulu dobijemo iz formule $P = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ zamijenimo li $a = 2R\sin\alpha$ i $b = 2R\sin\beta$.

Primjer 7.

U trokutu $\triangle ABC$ za duljine stranica vrijedi $a - b = 5$ cm, $c = 7$ cm. Duljina polumjera trokutu opisane kružnice je $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Kolika je duljina stranice a?

Rješenje. Iz *poučka o sinusima* slijedi $\sin\gamma = \frac{c}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ te je $\gamma = 60°$ ili $\gamma = 120°$.

Primijenimo zatim *poučak o kosinusu*:

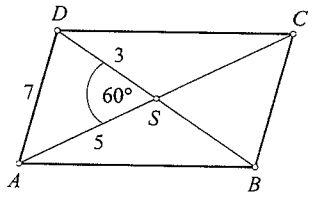
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + (a-5)^2 - 2a(a-5)\cos\gamma.$$

U prvom slučaju ($\gamma = 60°$) dobijemo $a = 8$ cm, a u drugom ($\gamma = 120°$) je $a = 6.3$ cm.

Primjer 8.

Duljine dijagonala paralelograma jednake su 6 cm i 10 cm, a duljina jedne njegove stranice iznosi 7 cm. Koliki je kut među dijagonalama paralelograma?

Rješenje.



Neka je $|AC| = e = 10$ cm, $|BD| = f = 6$ cm. Dijagonale svakog paralelograma se raspolavljaju. Iz trokuta $\triangle ASD$ primjenom *poučka o kosinusu* imamo:

$$\cos\varphi = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}.$$

Odatle je $\varphi = 120°$.

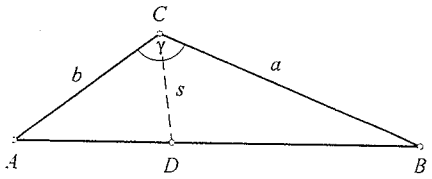
Uzimamo manji od dva kuta između dijagonala, a taj je $\alpha = 180° - \varphi = 60°$.

Primjer 9.

U trokutu $\triangle ABC$ zadan je $\gamma = 120°$, a za duljine stranica a i b vrijedi jednakost $ab = a + b$. Kolika je duljina simetrale kuta γ?

Rješenje. Simetrala s kuta $\sphericalangle ACB = \gamma$ dijeli trokut ABC na dva manja trokuta $\triangle ADC$ i $\triangle DBC$. Vrijedi:

$$P(ABC) = P(ADC) + P(DBC),$$



odnosno:

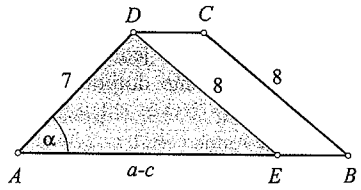
$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}sb\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}as\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Odavde, uz uvjet zadatka $ab = a + b$, imamo $s = 1$.

Primjer 10.

Duljine osnovica trapeza jednake su 14 cm i 3 cm, duljine krakova su 8 cm i 7 cm. Kolika je površina ovoga trapeza?

Rješenje.



Vrhom D trapeza položimo pravac DE paralelno kraku $\overline{BC}$. Tako dobijemo trokut sa stranicama duljina $|AE| = a - c = 11$ cm, $|AD| = 7$ cm i $|DE| = 8$ cm.

Primjenom *poučka o kosinusu* izračunat ćemo veličinu kuta α:

$$\cos\alpha = \frac{121 + 49 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{106}{154}.$$

Kako je površina trapeza jednaka $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$, valja sada izračunati duljinu visine v: $v = d \cdot \sin\alpha = 5$ cm. Konačni rezultat je $P = 43.16$ cm^2.

14. lekcija Zadaci

1. Ako su duljine dviju stranica trokuta jednake 17 cm i 22 cm, a kut nasuprot jednoj od njih iznosi $54°$, kolika je duljina treće stranice trokuta?

2. Dva su kuta trokuta jednaka $45°$ i $60°$, duljina stranice nasuprot trećem kutu je 25 cm. Koliki je opseg ovoga trokuta?

3. Duljine dviju stranica trokuta u omjeru su $3 : 4$, kut nasuprot jednoj od njih dvostruko je veći od kuta nasuprot drugoj. Koliki je treći kut trokuta?

4. Ako su duljine stranica trokuta u omjeru $2 : 5 : 6$, koliki je najveći kut trokuta?

5. U trokutu $\triangle ABC$ je $a = 10$ cm, $c = 12$ cm te $\sin\beta = \frac{3}{5}$. Kolika je duljina stranice b ovoga trokuta?

6. Dva su kuta trokuta $\beta = 70°15'$, $\gamma = 62°$, a duljina stranice a jednaka je 12 cm. Kolika je duljina visine na stranicu a?

7. Izračunajte duljinu stranice b trokuta $\triangle ABC$ ako je $a = 11$ cm, $\gamma = 33°$, a duljina polumjera trokutu opisane kružnice iznosi 22 cm.

8. Duljine dviju stranica trokuta jednake su 9 i 12 cm, a duljina visine na kraću od njih iznosi 10.5 cm. Izračunajte duljinu treće stranice trokuta.

9. Mjere kutova trokuta u omjeru su $3 : 4 : 5$. Koliki je omjer duljina najkraće i najdulje stranice?

10. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$ ako je $a - b = 20$ cm, $c = 40$ cm, $\gamma = 60°$?

11. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$ ako je $b + c = 48$ cm, $a = 25$ cm, $\alpha = 36°$?

12. Duljina težišnice povučene iz vrha A trokuta $\triangle ABC$ jednaka je $t_a = 15$ cm, a još su zadane duljine dviju stranica, $a = 16$ cm i $c = 11$ cm. Izračunajte duljinu stranice b.

13. Duljine stranica paralelograma jednake su 11 cm i 6 cm, a jedan kut paralelograma jednak je $112°$. Kolika je duljina kraće dijagonale paralelograma?

14. Kolika je duljina simetrale kuta uz osnovicu jednakokračnog trokuta ako je duljina kraka jednaka 15 cm, a kut nasuprot osnovici iznosi $30°$?

15. Kolika je duljina dijagonale $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$ ako su duljine stranica trapeza jednake $a = 11$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm i $d = 4.5$ cm?

16. Duljine stranica trapeza jednake su $a = 18$ cm, $b = 13$ cm, $c = 7$ cm i $d = 10$ cm. Kolika je duljina kraće dijagonale trapeza?

17. Duljine osnovica trapeza su $a = 10$ cm i $c = 6$ cm, a duljina kraka b je 8 cm. Kolika je duljina drugog kraka trapeza ako je $\alpha = 72°48'$?

14. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Dva su kuta trokuta $\triangle ABC$ jednaka $\alpha = 75°48'$ i $\beta = 54°33'$. Ako duljina stranice c iznosi 22.5 cm, duljina stranice a je:

A. 28.6 cm **B.** 22.6 cm **C.** 24.6 cm **D.** 32.6 cm

2. Duljine dviju stranica trokuta $\triangle ABC$ jednake su 10 cm i 15 cm. Kut nasuprot jednoj od tih dviju stranica dvostruko je veći od kuta nasuprot drugoj. Duljina treće stranice trokuta iznosi:

A. 11.7 cm **B.** 15.4 cm **C.** 12.5 cm **D.** 16.8 cm

3. Duljine stranica trokuta jednake su 23 cm i 30 cm, kut nasuprot duljoj od ovih dviju stranica jednak je $63°32'$. Kut nasuprot trećoj stranici trokuta iznosi:

A. $106°52'$ **B.** $78°33'$ **C.** $85°44'$ **D.** $73°8'$

4. Veličine kutova u trokutu u omjeru su $3 : 4 : 8$. Duljina stranice nasuprot najmanjem kutu iznosi 11 cm. Površina ovoga trokuta jednaka je:

A. $P = 60.2$ cm^2 **B.** $P = 76.1$ cm^2 **C.** $P = 26.6$ cm^2 **D.** $P = 55.5$ cm^2

5. Ako za stranice trokuta i tim stranicama suprotne kutove vrijedi jednakost $\frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, taj je trokut sigurno:

A. pravokutan **B.** jednakokračan **C.** tupokutan **D.** jednakostraničan

6. U trokutu $\triangle ABC$ duljine su stranica jednake a, b i c te vrijede jednakosti: $a - b = b - c = 5$ cm. Jedan kut ovoga trokuta jednak je $120°$. Duljina stranice nasuprot tomu kutu jednaka je:

A. 9.5 cm **B.** 11.5 cm **C.** 17.5 cm **D.** 12.5 cm

7. U trokutu $\triangle ABC$ duljine dviju visina jednake su $v_a = 15$ cm i $v_c = 11$ cm. Ako je $\beta = 60°$, veći od dva preostala kuta trokuta jednak je:

A. $68°35'$ **B.** $74°55'$ **C.** $70°44'$ **D.** $64°38'$

8. Kružnici promjera 25 cm upisan je trokut čija su dva kuta $\alpha = 72°33'$ i $\beta = 42°48'$. Opseg toga trokuta jednak je:

A. 65.25 cm **B.** 66.4 cm **C.** 75 cm **D.** 63.45 cm

9. Duljine stranica paralelograma jednake su 34 cm i 44 cm, šiljasti kut paralelograma iznosi $66°54'$. Duljina veće dijagonale paralelograma jednaka je:

A. 55.2 cm **B.** 58.2 cm **C.** 61.3 cm **D.** 65.3 cm

10. Duljine stranica trapeza $ABCD$ jednake su: $a = 18$ cm, $b = 12$ cm, $c = 8$ cm i $d = 10$ cm. Duljina dijagonale $\overline{BD}$ iznosi:

A. 20.5 cm **B.** 17.98 cm **C.** 22.8 cm **D.** 15.58 cm

Ispit 2

1. Dvije su stranice trokuta $a = 44$ cm i $b = 39$ cm, kut nasuprot stranici a je kut $\alpha = 95°27'9''$. Duljina stranice c jednaka je:
   A. 13 cm **B.** 15 cm **C.** 17 cm **D.** 11 cm

2. Duljine stranica trokuta $\triangle ABC$ su $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm i $(3+\sqrt{3})$ cm. Kut nasuprot najkraćoj stranici ovoga trokuta je kut čija je mjera:
   A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 15°

3. Osnovica jednakokračnog trokuta $\triangle ABC$ duga je 14 cm, kut nasuprot osnovici iznosi $48°16'$. Duljina težišnice povučene iz vrha na osnovici ovoga trokuta iznosi
   A. 15 cm **B.** 11 cm **C.** 18 cm **D.** 13 cm

4. Duljine stranica trokuta su 3 cm, 4 cm i 6 cm. Duljina ortogonalne projekcije najdulje stranice trokuta na najkraću iznosi:
   A. $\frac{41}{12}$ cm **B.** $\frac{30}{13}$ cm **C.** $\frac{27}{11}$ cm **D.** $\frac{29}{6}$ cm

5. Omjer duljina dviju visina trokuta $\triangle ABC$ jednak je $v_a : v_b = 3 : 4$. Ako je $\alpha = 2\beta$, onda je:
   A. $\gamma=35°25'51''$ **B.** $\gamma=38°35'46''$ **C.** $\gamma=41°33'47''$ **D.** $\gamma=45°35'55''$

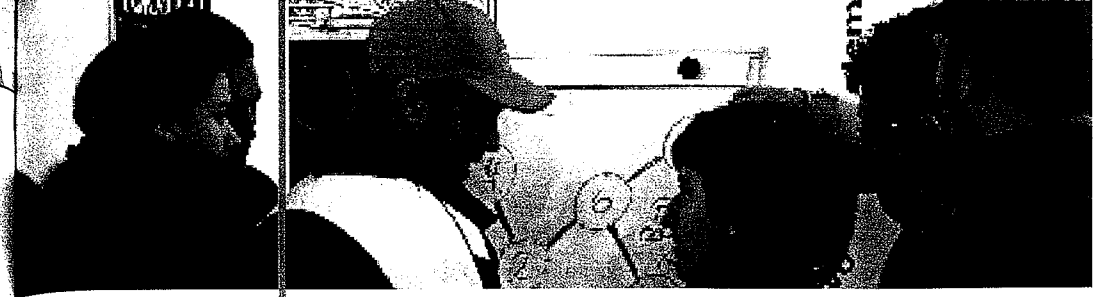
6. Sjecište D simetrale kuta γ trokuta $\triangle ABC$ i stranice $\overline{AB}$ dijeli tu stranicu na dva dijela tako da je $|AD| : |DB| = 4 : 5$. Ako je $\alpha = 82°$, onda je:
   A. $\beta=52°23'35''$ **B.** $\beta=48°37'22''$ **C.** $\beta=55°41'45''$ **D.** $\beta=44°45'38''$

7. Kružnici promjera 15 cm upisan je trokut čija su dva kuta $\alpha = 52°36'$ i $\beta = 48°42'$. Površina toga trokuta jednak je:
   A. $P=75.3$ cm^2 **B.** $P=55.8$ cm^2 **C.** $P=50.5$ cm^2 **D.** $P=65.8$ cm^2

8. Ako za duljine stranica a, b i c i za površinu P trokuta $\triangle ABC$ vrijedi $P = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$, onda je:
   A. $\alpha = 30°$ **B.** $\alpha = 45°$ **C.** $\alpha = 60°$ **D.** $\alpha = 15°$

9. Površina paralelograma jednaka je $24\sqrt{5}$ cm, duljine dijagonala su 14 cm i 8 cm. Duljina kraće stranice paralelograma jednaka je:
   A. 7 cm **B.** 8 cm **C.** 9 cm **D.** 10 cm

10. Duljine osnovica trapeza jednake su 11 cm i 4 cm, duljine krakova su 5 cm i 6 cm. Kut pod kojim se sijeku produženi krakovi trapeza iznosi:
    A. $66°17'$ **B.** $78°28'$ **C.** $71°32'$ **D.** $57°17'$



15. lekcija

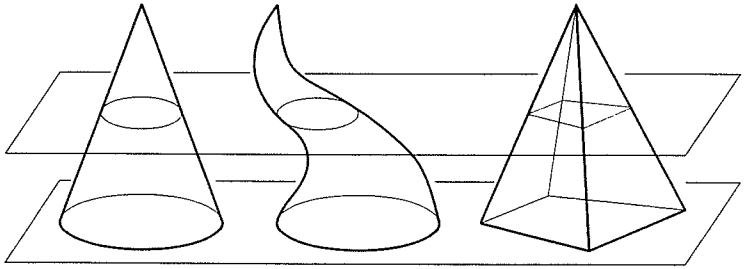
Poliedri i rotacijska tijela

15. lekcija Ponovimo

Cavalierijev princip

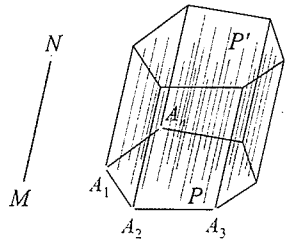
Cavalierijev princip za površine: ako se dva lika mogu postaviti tako da njihovi presjeci s pravcima paralelnima jednom zadanom pravcu imaju istu duljinu, tad oni imaju jednake površine.

Cavalierijev princip za obujme: ako se dva tijela mogu postaviti tako da njihovi presjeci s ravninama paralelnima jednoj zadanoj ravnini imaju jednake površine, onda ta dva tijela imaju jednake obujme.



Prizme

Neka je B zadani konveksan mnogokut $A_1A_2\cdots A_n$ u ravnini π i neka je $\overline{MN}$ dužina koja ne leži u toj ravnini. Nju nazivamo **izvodnicom**. Skup svih točaka koje leže na dužinama $\overline{PP'}$, paralelnim i sukladnim dužini $\overline{MN}$, i kojima početna točka leži u bilo kojoj točki P lika B nazivamo **prizmom**.



Mnogokut B je **osnovka** ili **baza** prizme. Prizma ima dvije baze, donju i gornju. Stranice na osnovkama prizme zovu se **osnovni bridovi**. Spojnice odgovarajućih vrhova donje i gornje osnovke su **bočni bridovi** prizme.

Paralelogrami $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$,... su **bočne strane** ili **pobočke** prizme. Skup svih pobočki prizme čini njezino **pobočje**.

Visina prizme je udaljenost ravnina u kojima leže osnovke prizme.

Za prizmu kažemo da je n-**terostrana** ako je njezina osnovka n-terokut.

Prizma je **uspravna** ako je izvodnica okomita na ravninu osnovke.

Prizma je **pravilna** ako je uspravna i ako je njezina osnovka pravilan mnogokut.

Oplošje i obujam prizme. Ako je B površina osnovke prizme, v njezina visina, a P površina pobočja, tada je:

$$O = 2B + P; \qquad V = B \cdot v.$$

Kocka

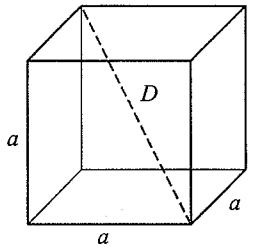
Neka je duljina brida kocke jednaka a.

Oplošje kocke $O = 6a^2$.

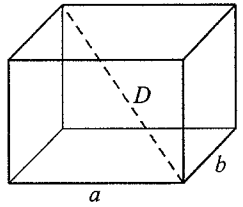
Obujam kocke $V = a^3$.

Duljina prostorne dijagonale

$$D = a\sqrt{3}.$$



Kvadar



Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.

Oplošje kvadra $O = 2(ab + ac + bc)$.

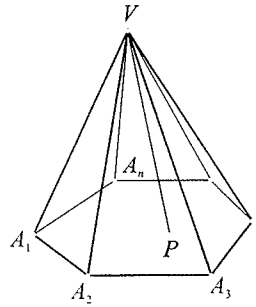
Obujam kvadra $V = abc$.

Duljina prostorne dijagonale kocke

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Piramida

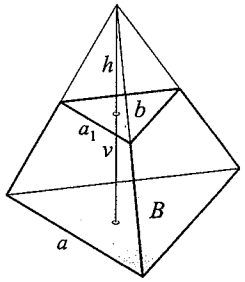
Neka je zadan konveksan mnogokut B s vrhovima $A_1A_2\ldots A_n$ u horizontalnoj ravnini π i točka V koja ne pripada toj ravnini. Skup svih točaka u prostoru koje leže na dužinama $\overline{PV}$, gdje je P po volji uzeta točka lika B, nazivamo **piramidom**.



Osnovka ili **baza** piramide je mnogokut B. Točku V nazivamo **vrhom** piramide. **Visina piramide**, v, udaljenost je vrha V od ravnine baze. Istim imenom nazivamo i samu dužinu $\overline{VV'}$, gdje je V' ortogonalna projekcija vrha V na ravninu baze. Trokuti A_1A_2V, A_2A_3V,... zovu se **strane** (**pobočke**); one čine **pobočje** piramide. Piramida je n-terostrana ako je njezina baza n-terokut.

Obujam piramide $V = \dfrac{B \cdot v}{3}$.

Krnja piramida



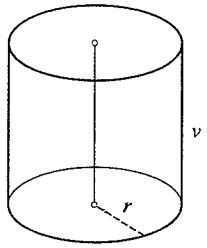
Ako piramidu presiječemo ravninom paralelno njezinoj osnovci, ona će se *raspasti* na dva dijela od kojih je jedan manja piramida zvana **dopunjak**. Drugi je dio **krnja piramida**.

Obujam krnje piramide $V = \frac{v}{3}(B+\sqrt{Bb}+b)$.

Osnovke krnje piramide sukladni su mnogokuti. Ako su a i a_1 bridovi donje, odnosno gornje osnovke, B površina donje, a b površina gornje osnovke, tada vrijedi $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{v+h}{h}\right)^2 = \frac{B}{b}$.

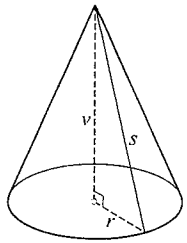
Valjak

Osnovke valjka su krugovi. Udaljenost ravnina u kojima leže osnovke valjka je **visina valjka**. **Os valjka** je pravac koji spaja središta osnovki. **Izvodnica valjka** je dužina koja spaja dvije točke na rubu osnovki i koja je paralelna s osi valjka. **Plašt valjka** je zakrivljena ploha koja zajedno s njegovim osnovkama omeđuje valjak. Valjak je **uspravan** ako mu je izvodnica okomita na ravninu baze. Ako to nije slučaj, valjak je **kos**. Uspravni i kosi valjci istog polumjera baze r i visine v imaju jednake obujme.



Oplošje uspravnog valjka $O = 2r\pi(r+v)$.
Obujam uspravnog valjka $V = r^2v\pi$.

Stožac



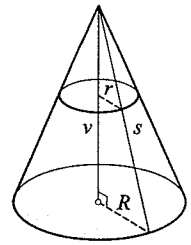
Osnovka stošca je krug. Udaljenost vrha stošca od ravnine njegove osnovke jest **visina stošca**. **Os stošca** je pravac koji spaja vrh stošca i središte osnovke. **Izvodnica stošca** je dužina koja spaja vrh i neku točku na rubu osnovke. Označava se sa s ($s^2 = v^2 + r^2$). **Plašt stošca** je zakrivljena ploha koja zajedno s njegovom osnovkom omeđuje stožac.

Stožac je **uspravan** ako nožište okomice spuštene iz vrha na bazu pada u središte kruga. Sve izvodnice uspravnog stošca imaju jednake duljinu. Ako to nije slučaj, stožac je **kos**. Uspravni i kosi stožci istog polumjera baze r i visine v imaju jednake obujme.

Oplošje uspravnog stošca $O = r\pi(r+s)$.
Obujam uspravnog stošca $V = \frac{1}{3}r^2\pi v$.

Krnji stožac

Ako stožac presiječemo ravninom paralelno njezinoj osnovci, ona će se *raspasti* na dva dijela od kojih je jedan manji stožac koji se zove **dopunjak**. Drugi je dio **krnji stožac**.



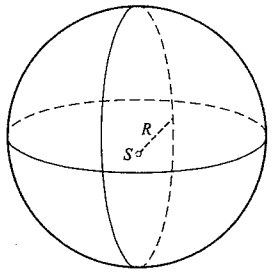
Oplošje uspravnog krnjeg stošca

$$O = R^2\pi + r^2\pi + s\pi(R+r).$$

Obujam uspravnog krnjeg stošca

$$V = \frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Kugla

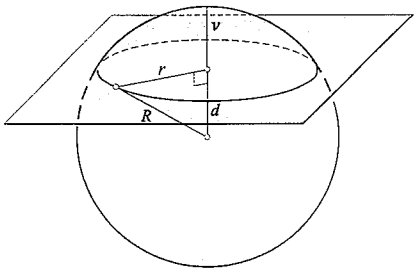


Kugla sa **središtem** S i polumjerom R skup je svih točaka T prostora za koje vrijedi $|TS| \leqslant R$.

Točke na rubu kugle čine **sferu**. Za svaku točku sfere vrijedi $|TS| = R$.

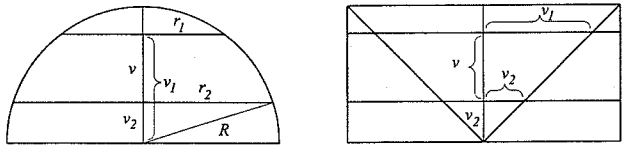
Obujam kugle $V = \frac{4}{3}R^3\pi$.

Presjek ravnine i kugle. Ravnina i sfera sijeku se u kružnici polumjera $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, gdje je d udaljenost ravnine od središta kugle. Ravnina i kugla sijeku se u krugu s tom obodnom kružnicom.



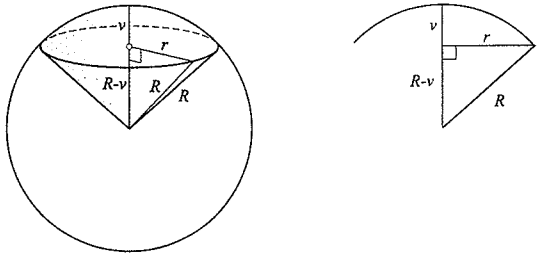
Obujam kuglina odsječka

$$V = \frac{1}{3}\pi v^2(3R - v) = \frac{1}{6}\pi v(3r^2 + v^2).$$



Obujam kuglina sloja jednak je obujmu valjka visine v iz kojeg je izrezan krnji stožac iste visine s polumjerima v_1 i v_2.

Obujam kuglina sloja $V = \frac{1}{6}\pi v(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2)$.

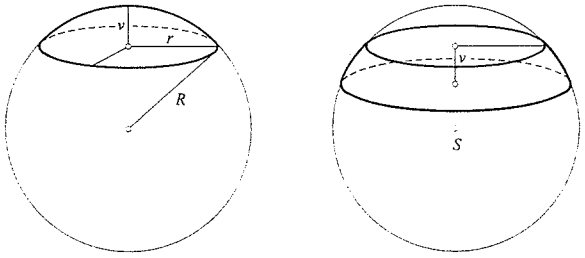


Kuglin isječak dobivamo tako da kuglinu odsječku dodamo stožac polumjera r i visine $R - v$.

Obujam kuglina isječka $V = \frac{2}{3}R^2\pi v$.

Sfera

Oplošje kugle (površina sfere) $O = 4R^2\pi$.

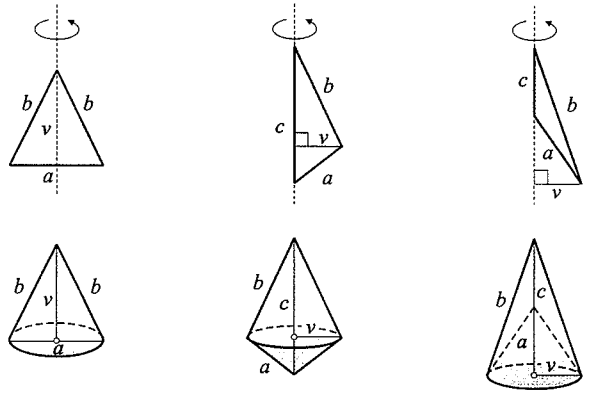


Kuglina kapica (lijevo) i kuglin pojas (desno).

Površina kugline kapice i pojasa $P = 2R\pi v$, v visina kuglina odsječka (pojasa).

Rotacijska tijela

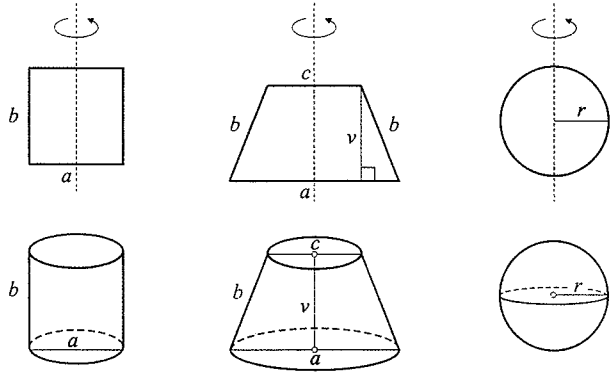
Uspravni valjak, stožac i kugla mogu nastati vrtnjom nekog lika oko istaknutog pravca, osi rotacije. Općenito, geometrijska tijela dobivena na ovaj način zovemo **rotacijskim tijelima**.



$O = \frac{1}{4}a(a+2b)\pi$ $\quad V = \frac{1}{12}a^2v\pi$

$O = v(a+b)\pi$ $\quad V = \frac{1}{3}v^2c\pi$

$O = v(a+b)\pi$ $\quad V = \frac{1}{3}v^2c\pi$



$O = \frac{1}{2}a(a+2b)\pi$ $\quad V = \frac{1}{4}a^2b\pi$

$O = \frac{1}{4}(a^2+c^2+2b(a+c))\pi$ $\quad V = \frac{1}{12}(a^2+ac+c^2)v\pi$

$O = 4r^2\pi$ $\quad V = \frac{4}{3}r^3\pi$

15. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Površine strana kvadra jednake su 12 cm^2, 15 cm^2 i 20 cm^2. Koliki su oplošje i obujam kvadra?

Rješenje. Oplošje kvadra zbroj je površina svih njegovih strana. Kvadar ima šest strana, po dvije suprotne su sukladne. Dakle, $O = 2(ab+bc+ac) = 2(12+15+20) = 94\,\text{cm}^2$.

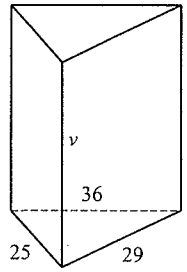
Volumen kvadra jednak je umnošku duljina njegovih bridova: $V = abc$. U zadatku je zadano $ab = 12\,\text{cm}^2$, $bc = 15\,\text{cm}^2$ i $ac = 20\,\text{cm}^2$.

Pomnožimo li te tri jednakosti, dobit ćemo $(abc)^2 = 12 \cdot 15 \cdot 20$, odakle slijedi $V = abc = 60\,\text{cm}^3$.

Primjer 2.

Duljine osnovnih bridova uspravne trostrane prizme jednake su 25 dm, 29 dm i 36 dm. Oplošje prizme iznosi 1 620 dm^2. Koliki je obujam ove prizme?

Rješenje. Oplošje svake prizme jednako je $O = 2B + P$, gdje je B površina osnovke (baze), a P površina plašta – zbroj površina svih bočnih strana prizme.



Površinu osnovke izračunat ćemo *Heronovom formulom*:

$$B = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 360\,\text{dm}^2.$$

Trebamo još izračunati duljinu visine.

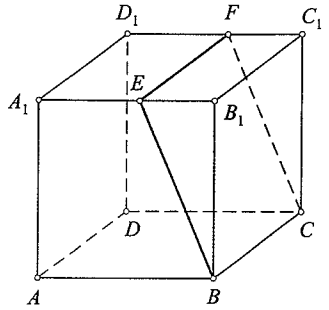
Iz $P = O - 2B = 1620 - 720 = 900\,\text{dm}^2 = (a+b+c)v = 90v$ slijedi $v = 10$ dm.

Konačno je $V = B \cdot v = 360 \cdot 10 = 3\,600\,\text{dm}^3$.

Primjer 3.

Ravnina položena osnovnim bridom kocke pod kutom od 30° prema osnovci dijeli kocku na dva dijela. U kojem su omjeru obujmovi tih dvaju dijelova?

Rješenje.



Opisani presjek kocke dijeli kocku na dvije prizme jednakih visina ($v = a$). Jednoj je prizmi osnovka trapez $ABEA_1$, a drugoj je osnovka pravokutni trokut $\triangle BB_1E$. Pritom je $|EB_1| = a \cdot \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Izračunajmo obujmove tih dviju prizmi:

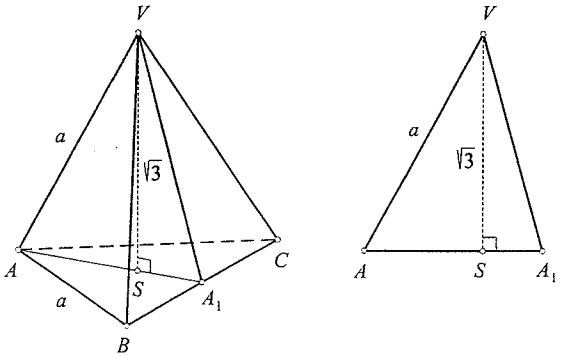
$$V_1 = \frac{6-\sqrt{3}}{6}a^3, \qquad V_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$

I sada je $V_1 : V_2 = 2\sqrt{3} - 1$.

Primjer 4.

Visina pravilnog tetraedra, trostrane piramide kojoj su svi bridovi iste duljine, jednaka je $\sqrt{3}$ m. Koliki je njegov obujam?

Rješenje. Promotrimo presjek tetraedra ravninom koja prolazi jednim njegovim bridom okomito na mimoilazni brid. Taj je presjek trokut $\triangle AA_1V$, u kojem je $|AA_1| = |A_1V| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pri čemu je a duljina brida tetraedra. Točka S središte je jednakostraničnom trokutu $\triangle ABC$ upisane i opisane kružnice, ali je i njegovo težište.



Iz pravokutnog trokuta $\triangle ASV$ primjenom *Pitagorina poučka* slijedi:

$$a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = v^2 = 3 \text{ te je } a^2 = \frac{9}{2}.$$

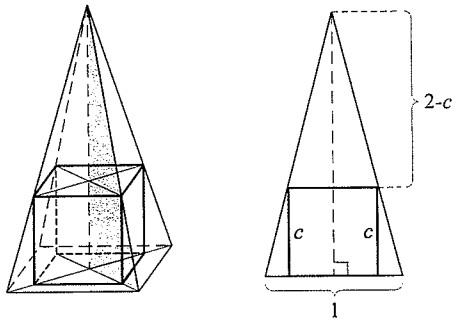
I sada je $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{8}\,\text{m}^3$.

Primjer 5.

U pravilnu četverostranu piramidu visine 2 m i osnovnog brida 1 m upisana je kocka kojoj je jedna strana na bazi piramide, a vrhovi njoj suprotne strane su na bočnim bridovima piramide. Kolika je duljina brida kocke?

Rješenje. Neka je c duljina brida kocke. Promotrimo presjek piramide ravninom koja prolazi vrhom V okomito na osnovku i paralelno osnovnom bridu. U tom presjeku imamo kvadrat upisan jednakokračnom trokutu i jasno uočavamo slične trokute. Ako je c duljina stranice kvadrata, možemo zapisati:

$$1 : 2 = c : (2 - c).$$

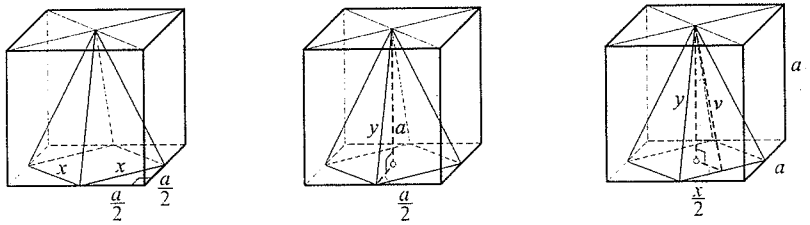


Slijedi $2 - c = 2c$ i odatle $c = \frac{2}{3}$ m.

Primjer 6.

Piramida s osnovkom površine 144 cm^2 i obujmom 432 cm^3 presječena je ravninom paralelno osnovci te je tako dobivena krnja piramida obujma 416 cm^3. Kolika je duljina visine krnje piramide?

Rješenje. Označimo li s B površinu osnovke, s V obujam, a s v visinu piramide, tada je $V = \frac{1}{3}Bv$. Odatle izračunamo duljinu visine, $v = 9$ cm.



Nadalje, obujam dopunjka, odsječene male piramide, jednak je:

$$V_d = V - v_k = 432 - 416 = 16 \text{ cm}^3.$$

Obrazlažući to sličnošću dopunjka i veće piramide, možemo zapisati sljedeći omjer:

$$V : V_d = v^3 : v_d^3.$$

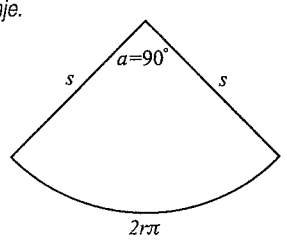
Uvrstimo li poznate veličine, imat ćemo $432 : 16 = 9^3 : v_d^3$, a odatle nalazimo $v_d = \sqrt[3]{27} = 3$ cm.

Visina krnje piramide jednaka je $v_k = v - v_d = 6$ cm.

Primjer 7.

Kolika je visina stošca čiji je plašt kružni isječak površine 100π cm^2, a središnji kut tog isječka iznosi 90° ?

Rješenje.



U mreži uspravnog stošca izvodnica s je polumjer kružnog isječka, odnosno polumjer kruga iz kojega je isječak isječen. Dakle, $100\pi = \frac{s^2\pi \cdot 90°}{360°}$. Odatle se dobije $s = 20$ cm.

Dalje, duljina kružnog luka isječka opseg je osnovke stošca. Odatle imamo:

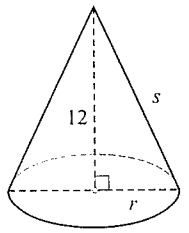
$$\frac{s\pi\alpha}{180°} = \frac{20\pi \cdot 90°}{180°} = 10\pi = 2r\pi. \text{ Dakle je } r = 5 \text{ cm}.$$

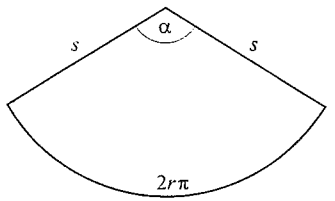
I konačno, iz $v^2 = s^2 - r^2$ nalazimo $v^2 = 375$ te je $v = 5\sqrt{15}$ cm.

Primjer 8.

Metalnu kuglu promjera 15 cm valja pretopiti u valjkastu cijev vanjskog promjera 42 mm i unutarnjeg 40 mm. Kolika će biti duljina te cijevi?

Rješenje. Obujam kugle promjera 15 cm jednak je $V_k = \frac{4}{3} \cdot 7.5^3\pi$. Obujam cijevi računamo po formuli $V_c = (r_v^2 - r_u^2)\pi \cdot d$, gdje je $2r_v$ vanjski, $2r_u$ unutarnji promjer cijevi, a d njezina duljina. Mora, dakle, biti: $V_c = (2.1^2 - 2^2)\pi d = 0.41\pi d = V_k$.



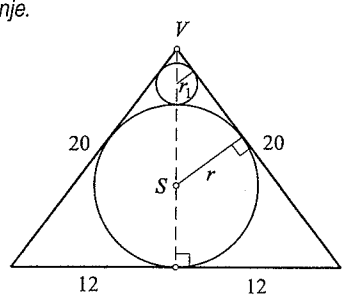


Iz $0.41\pi d = \frac{4}{3} \cdot 7.5^3\pi$ slijedi $d = 13.72$ m.

Primjer 9.

U uspravan stožac promjera osnovke $2r = 24$ cm i izvodnice $s = 20$ cm upisana je kugla. U prostor prema vrhu upisana je manja kugla koja dira plašt stošca i veću kuglu. Koliki je obujam te manje kugle?

Rješenje.



Pri rješavanju ovakvih zadataka najčešće se promatra osni presjek rotacijskog tijela. Zadatak se tako prevodi na problem geometrije ravnine. U ovom primjeru riječ je o kružnicama upisanim jednakokračnom trokutu.

Polumjer veće izračunat ćemo preko izraza za površinu trokuta:

$$P = \frac{2r \cdot v}{2} = r \cdot s.$$

Kako je $v = 16$ cm, dobit ćemo $r = 6$ cm. Položimo li tangentu paralelno osnovci trokuta na veću kružnicu, odsjeći ćemo od trokuta sličan trokut s visinom $v_1 = v - 2r = 16 - 12 = 4$ cm.

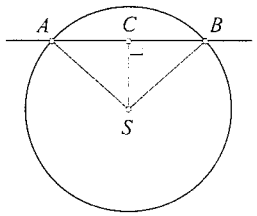
Polumjer manje kružnice možemo izračunatiti jednako kao što smo izračunali polumjer veće. No, možemo i pojednostavniti račun uočimo li da su mali i veliki trokut slični i da je koeficijent sličnosti $k = v : v_1 = 4$. To onda znači da je i $r : r_1 = 4$ pa je duljina polumjera male kružnice jednaka $\frac{3}{2}$.

Obujam manje kugle jednak je $V_1 = \frac{4}{3} r_1^3 \pi = 4.5\pi \text{ cm}^3$.

Primjer 10.

Površina presjeka kugle ravninom jednaka je $9\pi \text{ cm}^2$. Ako je polumjer kugle dvostruko veći od polumjera presjeka, koliko je ravnina udaljena od središta kugle?

Rješenje. Presjek kugle ravninom je krug promjera $\overline{AB}$. Kako je površina toga kruga $9\pi \text{ cm}^2$, onda je njegov polumjer $r = 3$ cm. Polumjer kugle dvostruko je veći, $R = 6$ cm. Slijedi da je trokut $\triangle ASB$ jednakostraničan pa je duljina njegove visine $\overline{SC}$ jednaka traženoj udaljenosti.



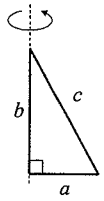
Dakle, $d = |SC| = 3\sqrt{3}$ cm.

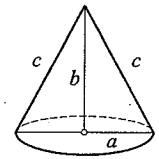
Primjer 11.

Pravokutni trokut čije su katete a i b rotira najprije oko katete b, a zatim oko katete a. Nađimo omjer između volumena nastalih stožaca.

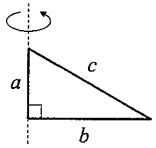
Rješenje.

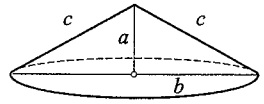
$$V_b = \frac{1}{3} a^2 \pi \cdot b,$$





$$V_a = \frac{1}{3} b^2 \pi \cdot a.$$





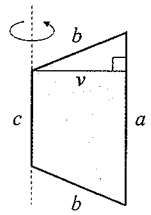
Slijedi:

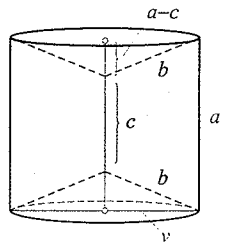
$$V_b : V_a = a : b.$$

Primjer 12.

Jednakokračan trapez s osnovicama duljina 20 cm i 10 cm, te krakovima duljine 13 cm vrti se oko manje osnovice. Izračunajmo površinu i obujam rotacijskog tijela.

Rješenje.





Tijelo koje nastane opisanom rotacijom omeđeno je plaštom valjka te plaštevima dvaju stožaca. Visina valjka jednaka je 20 cm, polumjeri osnovki i valjka i stošca jednaki su visini trapeza i iznose 12 cm, a visina stošca je 5 cm.

I sada računamo:

$$O = 2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot \pi + 2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \pi = 792 \text{ cm}^2.$$

Obujam tijela jednak je:

$$V = 12^2 \cdot 20 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 5 \cdot \pi = 3360 \text{ cm}^3.$$

15. lekcija Zadaci

1. Osnovka uspravne trostrane prizme je trokut sa stranicama duljina 4 cm, 13 cm i 15 cm. Ako je obujam ove prizme jednak 240 cm^3, koliko je njezino oplošje?

2. Površine bočnih strana trostrane prizme jednake su 30 cm^2, 51 cm^2 i 63 cm^2. Opseg baze iznosi 48 cm. Koliki je obujam prizme?

3. Koliki je volumen pravilne četverostrane prizme ako je duljina njezine prostorne dijagonale 14 cm, a duljina dijagonale jedne bočne strane 10 cm?

4. Duljine dijagonala strana kvadra jednake su 5 dm^2, $2\sqrt{5}$ dm^2 i $\sqrt{13}$ dm^2. Koliki su oplošje i obujam ovog kvadra?

5. Osnovka uspravne prizme je romb površine 54 cm^2. Površine dijagonalnih presjeka prizme ravninama okomitim na osnovku iznose 45 cm^2 i 60 cm^2. Koliki su oplošje i obujam ove prizme?

6. Koliki su oplošje i obujam pravilnog tetraedra čija je visina duga 10 cm?

7. Površina osnovke pravilne četverostrane piramide jednaka je 324 cm^2, a površina pobočja iznosi 432 cm^2. Koliki je obujam ove piramide?

8. Sjecišta dijagonala strana kocke vrhovi su pravilnog oktaedra. Koliki su oplošje i obujam oktaedra ako je duljina brida kocke 20 cm?

9. Bočne strane pravilne trostrane piramide s ravninom osnovke zatvaraju kut od 76°. Koliki su oplošje i obujam ove piramide, ako je duljina njezina osnovnog brida 12 cm?

10. Osni je presjek valjka pravokutnik opsega 36 cm i površine 80 cm^2. Koliki je obujam valjka?

11. Plašt valjka je kvadrat površine 64 cm^2. Koliki je obujam valjka?

12. Bakrenu žicu duljine 150 m i promjera 0.5 mm pretopimo u kocku. Kolika je duljina brida tako dobivene kocke?

13. Ako je čaša oblika valjka puna vode pa je nagnemo prema osi valjka za 30°, koliko će se vode izliti iz čaše?

14. Površina plašta stošca četiri je puta veća od površine njegove osnovke. Koliki je kut kružnog isječka u mreži stošca?

15. Ako 100 malih metalnih kuglica promjera 1 mm pretopimo u jednu veliku kuglu, koliki je promjer te velike kugle?

16. Polumjer presjeka kugle ravninom tri puta je manji od polumjera kugle. Ako je ravnina od središta kugle udaljena 4 cm, kolika je površina presjeka?

17. Kolika je duljina brida kocke koja je upisana kugli volumena 1500 cm^3?

18. Koliki postotak obujma kocke zauzima kugla najvećeg obujma smještena u kocku?

19. Kvadrat površine 27 cm^2 rotira oko pravca koji sadrži njegovu dijagonalu. Koliki su oplošje i obujam nastalog rotacijskog tijela?

20. Jednakokračan trokut s osnovicom duljine 14 cm i krakom od 25 cm vrti se oko pravca koji sadrži jedan krak trokuta. Koliki su oplošje i obujam rotacijskog tijela?

15. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Duljine bridova kvadra u omjeru su 1 : 2 : 3. Ako je obujam kvadra jednak 162 cm^2, njegovo oplošje iznosi:

A. 198 cm^2 **B.** 150 cm^2 **C.** 250 cm^2 **D.** 300 cm^2

2. Površine pobočaka uspravne trostrane prizme jednake su 64 cm^2, 80 cm^2 i 48 cm^2. Ako je duljina visine ove prizme 16 cm, njezin je obujam:

A. 100 cm^3 **B.** 96 cm^3 **C.** 250 cm^3 **D.** 150 cm^3

3. Osnovka prizme ujedno je i osnovka piramide. Vrh piramide nalazi se u gornjoj osnovci prizme. Ako je obujam prizme 333 cm^2, obujam piramide jednak je:

A. 37 cm^3 **B.** 74 cm^3 **C.** 111 cm^3 **D.** 148 cm^3

4. Piramida obujma 36 cm^2 presječena je ravninom paralelno osnovici na udaljenosti $\frac{2}{3}$ visine od vrha. Obujam odsječene piramide jednak je:

A. $\frac{18}{5}$ cm^3 **B.** $\frac{25}{3}$ cm^3 **C.** 16 cm^3 **D.** $\frac{32}{3}$ cm^3

5. Oplošje većeg od dva valjka, čiji je osni presjek pravokutnik opsega 36 cm i površine 80 cm^2, iznosi:

A. 130π cm^2 **B.** 120π cm^2 **C.** 150π cm^2 **D.** 968π cm^2

6. Površina uspravnog stošca iznosi 3 m^2, a površina njegova plašta jednaka je 2 m^2. Kut pri vrhu osnog presjeka ovog stošca iznosi:

A. 90° **B.** 75° **C.** 60° **D.** 120°

7. Pravilnoj šesterostranoj piramidi upisan je i opisan stožac tako da sva tri tijela imaju zajedničku visinu i da su im osnovke u istoj ravnini. Volumeni upisanog i opisanog stošca u omjeru su:

A. $2 : \sqrt{6}$ **B.** 2 : 3 **C.** 3 : 4 **D.** 4 : 5

8. Polumjer kugle upisane pravilnoj četverostranoj piramidi čiji su svi bridovi duljine $\sqrt{2}$ dm jednak je:

A. 1 dm **B.** $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ dm **C.** $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ dm **D.** $\frac{1}{3}$ dm

9. Ako se polumjer kugle poveća tri puta, njezin se obujam poveća:

A. 3 puta **B.** 6 puta **C.** 9 puta **D.** 27 puta

10. Trokut sa stranicama duljina $a = 4$ cm, $b = 6$ cm te kutom $\gamma = 120°$ između njih vrti se oko stranice a. Obujam nastalog rotacijskog tijela jednak je:

A. 30π cm^2 **B.** 36π cm^2 **C.** 54π cm^2 **D.** 72π cm^2

Ispit 2

1. Pobočje uspravne trostrane prizme razgrnuto u ravninu je kvadrat površine $144\ cm^2$. Ako su duljine osnovnih bridova prizme u omjeru $3 : 4 : 5$, obujam te prizme jednak je:
   A. $54\ cm^3$ **B.** $72\ cm^3$ **C.** $60\ cm^3$ **D.** $84\ cm^3$

2. Oplošje pravilne šesterostrane prizme kojoj su sve bočne strane kvadrati, iznosi $403\ cm^2$. Obujam ove prizme približno je jednak:
   A. $256\sqrt{3}\ cm^3$ **B.** $324\sqrt{3}\ cm^3$ **C.** $484\sqrt{3}\ cm^3$ **D.** $300\sqrt{3}\ cm^3$

3. Duljine bridova kvadra jednake su 12 cm, 18 cm i 30 cm. Ravnina koja prolazi polovištima bridova što se sastaju u jednom vrhu kvadra odsijeca od kvadra piramidu. Obujam te piramide jednak je:
   A. $115\ cm^3$ **B.** $155\ cm^3$ **C.** $135\ cm^3$ **D.** $175\ cm^3$

4. Dvije piramide imaju osnovke jednakih površina. Omjer njihovih visina jednak je $2 : 3$. Omjer obujama veće i manje piramide jednak je:
   A. $3 : 2$ **B.** $1 : 2$ **C.** $3 : 1$ **D.** $9 : 4$

5. Piramida je presječena ravninom paralelno osnovci polovištem visine. Ako je obujam pritom dobivene krnje piramide jednak $27\ cm^3$, onda je obujam cijele piramide:
   A. $36.86\ cm^3$ **B.** $39.86\ cm^3$ **C.** $44.86\ cm^3$ **D.** $30.86\ cm^3$

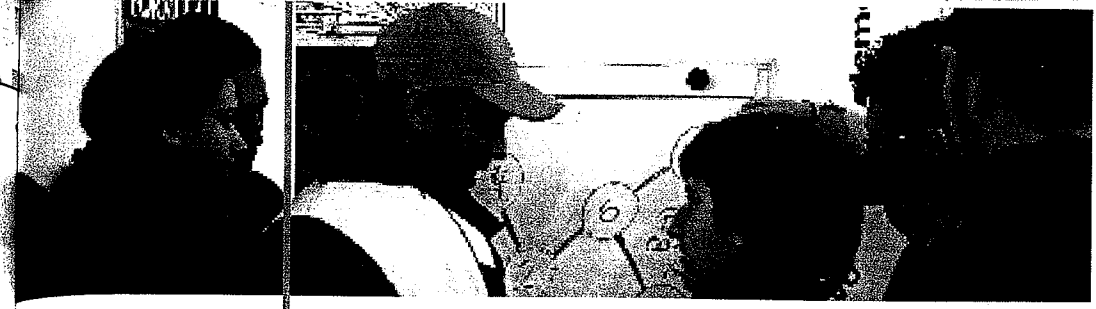
6. Bakrenu žicu duljine 250 m i promjera 1 mm pretopimo u kocku. Duljina brida tako dobijene kocke je:
   A. 5.8 cm **B.** 7.5 cm **C.** 8.8 cm **D.** 9 cm

7. Površina plašta stošca četiri je puta veća od površine njegove osnovke. Kut kružnog isječka u mreži tog stošca iznosi:
   A. $180°$ **B.** $120°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$

8. U posudi u obliku kocke duljine brida 8 cm koja leži na horizontalnoj ravnini nalazi se voda. Kad u vodu uronimo kuglicu, razina vode u posudi podigne se za 1.5 cm. Promjer kuglice je jednak:
   A. 3 cm **B.** 4.2 cm **C.** 7.25 cm **D.** 5.68 cm

9. Koliki postotak obujma kugle zauzima kocka najvećeg obujma smještena u kuglu?
   A. 60% **B.** 55% **C.** 72% **D.** 37%

10. Romb sa stranicom duljine 12 cm i šiljastim kutom $60°$ rotira oko kraće dijagonale. Površina nastaloga tijela jednaka je:
   A. $655.5\ cm^2$ **B.** $707.5\ cm^2$ **C.** $813.8\ cm^2$ **D.** $783.6\ cm^2$



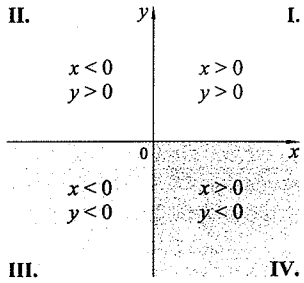
16. lekcija

Koordinatni sustav u ravnini

16. lekcija Ponovimo

Za položaj točke u koordinatnoj ravnini potrebno je znati dva broja, njezine dvije koordinate, **apscisu** i **ordinatu**.

Postavimo međusobno okomito dva brojevna pravca, x i y, tako da imaju zajedničko ishodište O. Na brojevnom pravcu x pozitivni su brojevi zdesna ishodištu, a na brojevnom pravcu y pozitivni su brojevi smješteni iznad ishodišta, što je na slici naznačeno strelicama. Pravce x i y zovemo **koordinatnim osima**. Pravac x je **os apscisa**, pravac y **os ordinata**. Na ovaj je način određen sustav koji nazivamo **pravokutnim koordinatnim sustavom** ili **Kartezijevim sustavom**.



Koordinatne osi, pravci x i y, dijele ravninu u četiri područja koja se zovu **kvadranti**. Kvadrante karakteriziraju predznaci koordinata njihovih točaka.

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u ravnini iznosi:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Površina trokuta kojemu su vrhovi točke $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ i $T_3(x_3, y_3)$ jednaka je:

$$P = \tfrac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru. Neka je λ pozitivan realni broj. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ako vrijedi:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}.$$

Koordinate djelišne točke. Točka C koja dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ima koordinate:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \qquad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.$$

Polovište dužine. Neka su $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ zadane točke. Polovište P dužine $\overline{AB}$ ima koordinate:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_P = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Koordinate težišta trokuta. Težište T trokuta ABC s vrhovima $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ ima koordinate

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \qquad y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

16. lekcija Primjeri

Primjer 1.

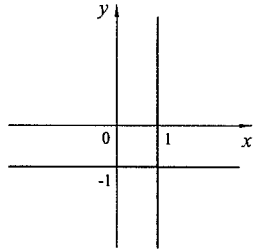
Odredimo skup svih točaka $T(x, y)$ ravnine za koje vrijedi:

$$(x - 1) \cdot (y + 1) \leq 0.$$

Rješenje. Iz nejednakosti $(x - 1) \cdot (y + 1) \leq 0$ slijedi $x - 1 \geq 0$ i $y + 1 \leq 0$ ili $x - 1 \leq 0$ i $y + 1 \geq 0$.

Taj je sustav uvjeta ekvivalentan s $x \geq 1$ i $y \leq -1$ ili $x \leq 1$ i $y \geq -1$.

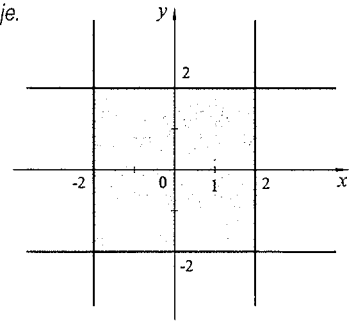
Pravcima $x = 1$ i $y = -1$ ravnina je podijeljena u četiri kvadranta. Zadanom nejednadžbom određen je skup točaka koje pripadaju jednom od dva istaknuta dijela ravnine.



Primjer 2.

Odredimo skup svih točaka $T(x, y)$ ravnine za koje vrijedi $|x| \leq 2$ i $|y| \leq 2$.

Rješenje.



Iz $|x| \leq 2$ slijedi $-2 \leq x \leq 2$, a iz $|y| \leq 2$ slijedi $-2 \leq y \leq 2$.

Prvim uvjetom zadana je pruga čije su granice pravci paralelni s osi x, a drugime pruga čije su granice paralelne s osi y.

Rješenje zadatka je kvadrat, koji je presjek tih dviju pruga.

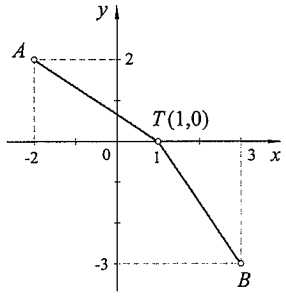
Primjer 3.

Dane su točke $A(-2, 2)$ i $B(3, -3)$. Odredimo na osi apscisa točku koja je jednako udaljena i od točke A i od točke B.

Rješenje. Svaka točka na osi x oblika je $T(x,0)$. Prema uvjetu zadatka treba biti $|AT| = |BT|$. Koristeći se formulom za udaljenost točaka u ravnini, dolazimo do jednadžbe:

$$\sqrt{(x+2)^2+4} = \sqrt{(x-3)^2+9}.$$

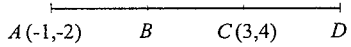
Slijedi $4x + 8 = -6x + 18$, a odatle $x = 1$. Dakle, točka $T(1,0)$ jednako je udaljena od točaka A i B.



Primjer 4.

Točkama B i C dužina $\overline{AD}$ podijeljena je na tri sukladna dijela. Ako je $A(-1,-2)$, $C(3,4)$, odredimo koordinate točaka B i D.

Rješenje.

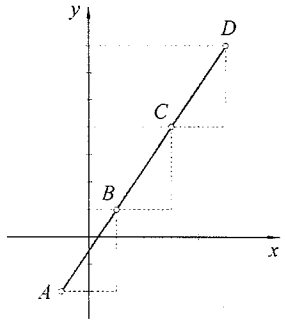


Točka B polovište je dužine $\overline{AC}$, pa je $x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$, te $y_B = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$. Tako smo odredili točku $B(1,1)$.

Točka C polovište je dužine $\overline{BD}$, te je $x_C = \frac{x_B + x_D}{2}$. Odatle je $3 = \frac{1+x_D}{2}$, a iz te male jednadžbe dobije se $x_D = 5$.

Analogno, iz $y_C = \frac{y_B + y_D}{2}$ nalazimo $D(5,7)$. Tako smo dobili i točku $D(5,7)$.

No, ovaj zadatak možemo riješiti i geometrijski. Promotrite crtež i pokušajte doći do rezultata zadatka na temelju osnovnog svojstva linearnosti i uz primjenu sukladnosti trokuta.



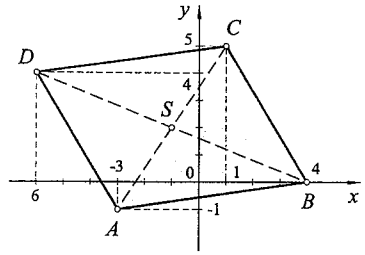
Naime, podijelimo li katete $\overline{AE}$ i $\overline{ED}$ (paralelne koordinatnim osima) pravokutnog trokuta $\triangle AED$ na tri sukladna dijela i tim djelištima položimo paralele s koordinatnim osima, uočit ćemo sukladne trokute.

Dalje zaključivanje provedite sami.

Primjer 5.

Točke $A(-3,-1)$, $B(4,0)$ i $C(1,5)$ tri su uzastopna vrha paralelograma $ABCD$. Odredimo duljinu dijagonale $\overline{BD}$ toga paralelograma.

Rješenje. Dijagonale paralelograma raspolavljaju se, polovište dijagonale $\overline{AC}$ ista je točka kao i polovište dijagonale $\overline{BD}$. To je točka $S(-1,2)$. Sada iz podataka za točke B i S možemo odrediti vrh D paralelograma kao drugi kraj dužine kojoj su dani jedan kraj i polovište. Dobijemo $D(-6,4)$. Duljina dijagonale $\overline{BD}$ jednaka je $|BD| = \sqrt{116}$.



Primjer 6.

Točke $A(-3,1)$, $B(3,3)$ i $C(-1,5)$ vrhovi su trokuta $\triangle ABC$.

1) Dokaži da je taj trokut pravokutan.

2) Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

Rješenje. **1)** Izračunajmo kvadrate duljina stranica ovoga trokuta. Redom je: $|AB|^2 = 40$, $|AC|^2 = 20$, $|BC|^2 = 20$.

Kako je $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, prema *obratu Pitagorina poučka* taj je trokut pravokutan.

Uočimo kako je trokut $\triangle ABC$ i jednakokračan.

2) Površinu trokuta možemo izračunati po formuli kojom računamo površinu trokuta koji je određen koordinatama svojih vrhova.

No, taj je trokut pravokutan pa možemo računati i po "običnoj" formuli:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = 10 \text{ kv. jed.}$$

Primjer 7.

Točke $A(-1,0)$, $B(5,2)$ i $C(1,5)$ vrhovi su trokuta $\triangle ABC$. Kolika je duljina visine na stranicu $\overline{BC}$ trokuta?

Rješenje. Izračunat ćemo površinu trokuta $\triangle ABC$, zatim duljinu stranice $|BC|$, pa iz $P = \frac{|BC| \cdot v}{2}$ odrediti duljinu visine na stranicu $|BC|$ trokuta.

Računamo površinu:

$$P = \frac{1}{2}|-1(2-5) + 5(5-0) + 1(0-2)| = \frac{1}{2}|3 + 25 - 2| = 13.$$

Sada računamo duljinu stranice $|BC|$:

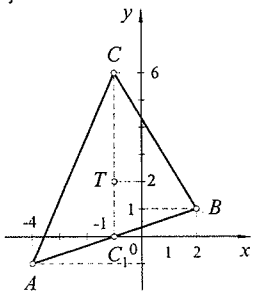
$$|BC| = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

I sada je $13 = \frac{5 \cdot v}{2}$, odakle slijedi $v = \frac{26}{5} = 5.2$.

Primjer 8.

Točka $A(-4,-1)$ jedan je vrh trokuta $\triangle ABC$, točka $C_1(-1,0)$ polovište je stranice $\overline{AB}$, a točka $T(-1,2)$ težište je trokuta. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

Rješenje.



Nacrtajmo skicu trokuta $\triangle ABC$ i naznačimo na njoj sve točke koje se spominju u zadatku.

Uočavamo kako je lako odrediti vrh B trokuta jer su zadani vrh A i polovište dužine $\overline{AB}$. Nalazimo da je $B(2,1)$.

Sada iz koordinata točaka A, B i T možemo odrediti vrh C:

Iz $x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ dobijemo $x_C = -1$. Primijetimo kako smo tu koordinatu mogli odmah naći jer je $x_{C_1} = x_T = -1$, pa je i $x_C = -1$.

Iz $y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ dobijemo $y_C = 6$.

Površina trokuta sada se lako izračuna iz formule za površinu trokuta koji je zadan koordinatama svojih vrhova:

$$P = \frac{1}{2}|-4(1-6) + 2(6+1) - 1(-1-1)| = 18 \text{ kv. jed.}$$

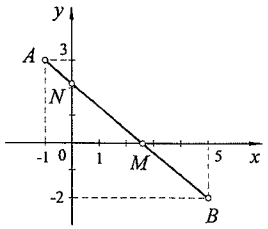
Primijetimo kako smo do istog rezultata mogli doći i brže. Naime, težišnicama je svaki trokut razrezan na šest manjih trokuta i svi oni imaju jednaku površinu. U to se možemo uvjeriti primjenjujući sljedeću činjenicu: Ako dva trokuta imaju par stranica jednakih duljina i ako su visine na te stranice jednako duge, ta dva trokuta imaju jednake površine.

Primjenjujući ovo pravilo možemo najprije izračunati $P_{\triangle ACT} = 3$ kv. jed. pa je zatim $P_{\triangle ABC} = 6 \cdot 3 = 18$ kv. jed.

Primjer 9.

U kojim omjerima sjecišta s koordinatnim osima dijele dužinu $\overline{AB}$, $A(-1,3)$, $B(5,-2)$?

Rješenje. Označimo sjecišta dužine $\overline{AB}$ s koordinatnim osima x i y s $M(m,0)$, odnosno $N(0,n)$. Kako znamo koordinate krajnjih točaka A i B dužine i po jednu koordinatu svakog od dvaju djelišta, možemo odrediti i pripadne djelišne omjere.



Odredimo najprije λ_1, omjer u kojemu dužinu $\overline{AB}$ dijeli točka M, računajući od točke A.

Tako iz $y_M = 0 = \frac{3 + (-2)\cdot\lambda_1}{1+\lambda_1}$ dobijemo $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, a iz $x_M = 0 = \frac{-1+5\lambda_2}{1+\lambda_2}$ dobijemo $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, djelišni omjer u kojem točka N dijeli dužinu $\overline{AB}$ računajući od točke A.

Primjer 10.

Dva su vrha na osnovici trokuta $A(-2,-1)$ i $B(5,-3)$, a treći vrh C je na osi y. Odredi vrh C ako je površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka 30.

Rješenje. Označimo li $C(0,n)$, tada ćemo moći zapisati jednakost:

$$P = \frac{1}{2}|-2(-3-n) + 5(n+1) + 0(-1+3)| = 30.$$

Nakon sređivanja, ovu jednadžbu dobijemo u obliku $|7n+11| = 60$.

Zadatak ima dva rješenja, dvije su mogućnosti: Ako je $7n + 11 = 60$, dobijemo $n = 7$. A iz $7n + 60 = -11$ slijedi $n = -\frac{71}{7}$.

Rješenje zadatka je $C_1(0,7)$ ili $C_2\left(0, -\frac{71}{7}\right)$.

16. lekcija Zadaci

1. Polovišta su stranica trokuta točke $A_1(-1,-1)$, $B_1(2,-1)$ i $C_1(1,2)$. Odredite vrhove trokuta $\triangle ABC$.

2. Tri su vrha paralelograma $ABCD$ točke $A(-4,0)$, $B(3,-2)$ i $C(4,4)$. Pokažite da su polovišta njegovih stranica također vrhovi paralelograma.

3. Dva su vrha pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ točke $A(-4,2)$ i $B(5,4)$. Treći vrh C, koji je vrh pravog kuta trokuta leži na osi x. Koje su njegove koordinate?

4. Točka $A(x,5)$ jednako je udaljena od osi apscisa i od točke $B(3,2)$. Odredite apscisu točke A.

5. Četverokut $ABCD$, $A(-2,2)$, $B(4,-4)$, $C(7,-1)$, $D(1,5)$ je pravokutnik. Dokažite! Kolika je površina toga pravokutnika?

6. Točke $A(-2,-1)$, $B(1,0)$, $C(2,3)$ i $D(-1,2)$ vrhovi su romba. Provjerite!

7. Dane su točke $A(-2,-3)$ i $B(6,1)$. Odredite na osi ordinata točku N, tako da kut $\sphericalangle ANB$ bude pravi.

8. Odredite duljinu težišnice povučene iz vrha A trokuta $\triangle ABC$, $A(1,0)$, $B(6,1)$, $C(4,5)$.

9. Točke $A(3,5)$, $B(-1,2)$ i $C(1,1)$ vrhovi su trokuta $\triangle ABC$. Kolike su duljine srednjica ovog trokuta?

10. Točke $A(-2,4)$ i $B(6,8)$ vrhovi su na osnovici jednakokračnog trokuta. Odredite treći vrh C ako je on na osi ordinata.

11. Točke $A(-2,-4)$, $B(8,6)$, $C(-4,2)$ vrhovi su trokuta $\triangle ABC$. Odredite središte i polumjer tom trokutu opisane kružnice.

12. Točke $A(3,3)$ i $C(6,1)$ dva su vrha trokuta $\triangle ABC$, a točka $P(1,-1)$ polovište je stranice $\overline{AB}$. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

13. Odredite nepoznatu koordinatu točke C ako točke $A(-4,0)$, $B(0,-2)$ i $C(x,-5)$ pripadaju jednom pravcu.

14. Dužina $\overline{AB}$, $A(-4,3)$, $B(2,-1)$ jedna je stranica paralelograma. Ako je sjecište dijagonala paralelograma točka $S(1,4)$, kolika mu je površina?

15. Dva su vrha trokuta $\triangle ABC$ točke $A(4,1)$ i $B(2,5)$, a treći vrh C leži na simetrali prvog i trećeg kvadranta. Ako je površina trokuta jednaka 15 kv. jed., odredite koordinate točke C.

16. Točke $A_1(5,5)$ i $B_1(1,4)$ polovišta su stranica $\overline{BC}$, odnosno $\overline{AC}$ trokuta $\triangle ABC$, točka $T(3,4)$ njegovo je težište. Odredite vrhove ovog trokuta.

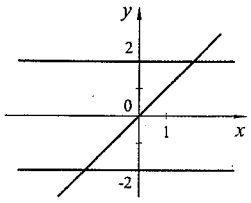
17. Dužina $\overline{AB}$, $A(-3,1)$, $B(7,-4)$ podijeljena je točkama P_1, P_2, P_3 i P_4 na pet sukladnih dijelova. Kolika je duljina dužine $\overline{P_2P_4}$?

18. Vrhovi trokuta $\triangle ABC$ jesu točke $A(-3,-1)$, $B(5,-7)$, $C(1,2)$. Odredite točku u kojoj simetrala kuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$.

19. Točke $A(-2,4)$ i $C(5,2)$ dva su vrha trokuta $\triangle ABC$. Treći je vrh B na osi apscisa, a težište trokuta je na osi ordinata. Odredite koordinate vrha B i težišta trokuta.

16. lekcija Ispiti

Ispit 1



1. Na slici je prikazan skup točaka $T(x,y)$ ravnine čije koordinate zadovoljavaju sustav uvjeta:

A. $|y| \le 2$ i $x \ge y$ **B.** $|y| \ge 2$ i $x \le y$

C. $|y| \le 2$ i $x \le y$ **D.** $|y| \ge 2$ i $x \ge y$

2. Dva su susjedna vrha kvadrata $ABCD$ točke $A(0,3)$ i $B(4,0)$. Ako je kvadrat smješten u I. kvadrantu, njegovo je središte točka:

A. $S\left(3,\frac{7}{2}\right)$ **B.** $S(3,4)$ **C.** $S\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$ **D.** $S\left(\frac{5}{2},4\right)$

3. Točka $A(7,1)$ i točka B koja leži na osi x jednako su udaljene od točke $T(3,4)$. Zbroj apscisa dviju točaka B_1 i B_2 s ovim svojstvom jednak je:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

4. Točka C simetrična je slika točke A s obzirom na točku B, a točka D simetrična je slika točke B s obzirom na točku C. Ako je $A(-1,3)$, $C(3,-3)$, tada je:

A. $D(5,-5)$ **B.** $D(5,-6)$ **C.** $D(4,-5)$ **D.** $D(6,-6)$

5. Površina kruga kojem je dužina $\overline{AB}$, $A(-3,-2)$, $B(5,4)$ promjer jednaka je:

A. 50π kv. jed. **B.** 25π kv. jed. **C.** 100π kv. jed. **D.** 75π kv. jed.

6. Površina trokuta $\triangle ABC$ kojem su točke $A_1(-2,1)$, $B_1(0,-2)$ i $C_1(2,3)$ polovišta stranica jednaka je:

A. 16 kv. jed. **B.** 24 kv. jed. **C.** 32 kv. jed. **D.** 40 kv. jed.

7. Točke $A(-1,1)$, $B(2,-1)$ i $C(x,4)$ pripadaju jednom pravcu. Tada je:

A. $x=5$ **B.** $x=-5.5$ **C.** $x=-3$ **D.** $x=4.5$

8. Tri su uzastopna vrha paralelograma točke $A(-2,-1)$, $B(4,1)$ i $C(2,3)$. Duljina dijagonale $\overline{BD}$ iznosi:

A. 6 jed. **B.** 8 jed. **C.** 10 jed. **D.** 12 jed.

9. U kojem omjeru dužinu $\overline{AB}$, $A(-1,1)$, $B(5,7)$ dijeli sjecište pravca AB s osi ordinata?

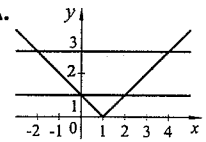
A. 1 : 3 **B.** 1 : 4 **C.** 1 : 5 **D.** 1 : 6

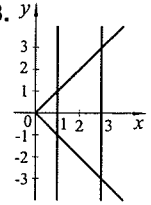
10. Točka $A(-3,0)$ vrh je trokuta $\triangle ABC$, točka $C_1(1,-1)$ polovište je njegove stranice $\overline{AB}$, a točka $T(2,2)$ težište je istog trokuta. Površina trokuta $\triangle ABC$ iznosi:

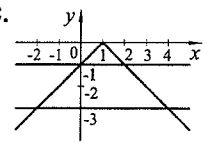
A. 39 kv. jed. **B.** 36 kv. jed. **C.** 33 kv. jed. **D.** 30 kv. jed.

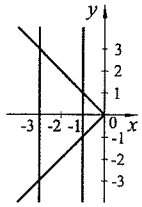
Ispit 2

1. Na kojoj je slici prikazan skup točaka $T(x, y)$ ravnine koji je određen uvjetom $y \leq -|x-1|$ i $-3 \leq y \leq -1$?

A.


B.


C.


D.


2. Točke $B(3, 1)$ i $D(-3, -1)$ suprotni su vrhovi kvadrata $ABCD$. Površina kvadrata jednaka je:

A. 20 kv. jed. **B.** 50 kv. jed. **C.** 64 kv. jed. **D.** 72 kv. jed.

3. Opseg kruga kojem je dužina $\overline{AB}$, $A(3,2)$, $B(-5,-4)$ promjer iznosi:

A. 10π jed. **B.** 20π jed. **C.** 40π jed. **D.** 100π jed.

4. Zadan je trokut $\triangle ABC$: $A(-3,0)$, $B(5,-3)$, $C(1,7)$. Duljina težišnice povučene iz vrha A jednaka je:

A. $2\sqrt{10}$ jed. **B.** $3\sqrt{5}$ jed. **C.** 6 jed. **D.** $4\sqrt{3}$ jed.

5. Točkama B i C dužina $\overline{AD}$ podijeljena je na tri jednaka dijela. Ako je $A(4,-1)$, $B(-2,3)$, zbroj koordinata točke D iznosi:

A. -3 **B.** 5 **C.** -7 **D.** 9

6. Kolika je površina paralelograma $ABCD$ ako su točke $A(-1,-2)$ i $B(3,1)$ dva njegova susjedna vrha, a točka $S(0,1)$ sjecište njegovih dijagonala?

A. 16 kv. jed. **B.** 18 kv. jed. **C.** 20 kv. jed. **D.** 24 kv. jed.

7. Točke $A(-3,-2)$, $B(-1,y)$ i $C(1,6)$ pripadaju jednom pravcu. Tada je:

A. $y=-3$ **B.** $y=2$ **C.** $y=-1$ **D.** $y=0$

8. Točke $A_1(4,4)$, $B_1(2,2)$ i $C_1(3,0)$ polovišta su stranica trokuta $\triangle ABC$. Težište trokuta $\triangle ABC$ je točka:

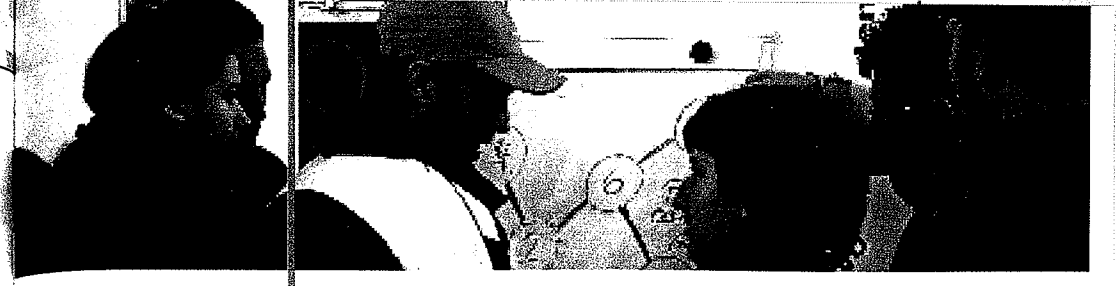
A. $T(3,1)$ **B.** $T(3,2)$ **C.** $T(3,3)$ **D.** $T(3,4)$

9. Trokut $\triangle ABC$, $A(-2,1)$, $B(4,-2)$, $C(-1,y)$ pravokutan je, a pravi kut je pri vrhu A. Tada je:

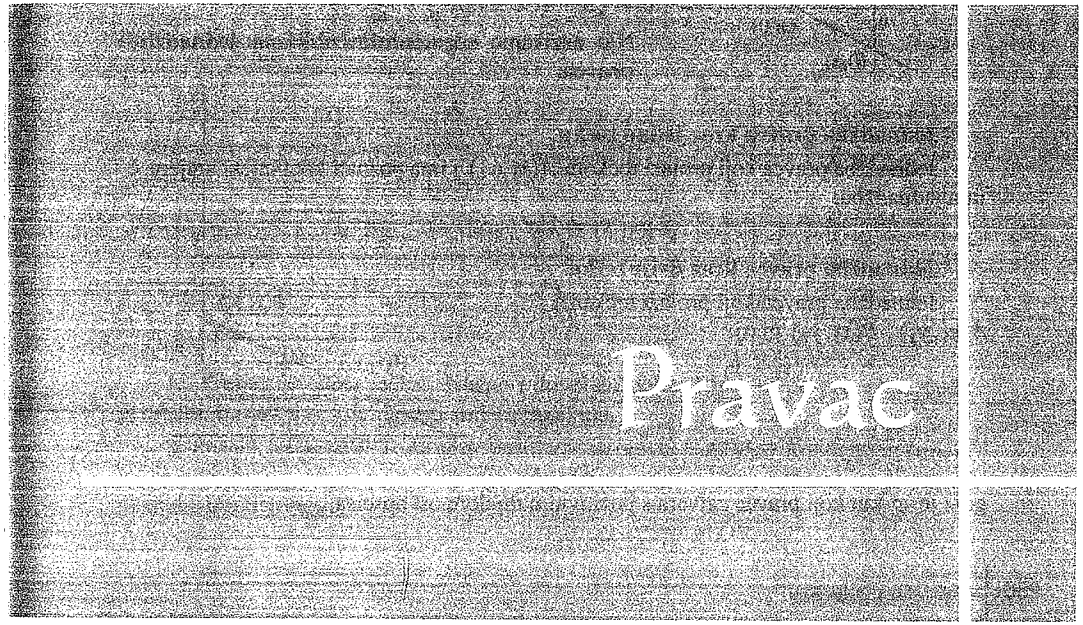
A. $y=2$ **B.** $y=-1$ **C.** $y=3$ **D.** $y=-3$

10. Vrh A trokuta $\triangle ABC$ leži na osi ordinata, ostala su dva vrha točke $B(4,-3)$ i $C(5,4)$. Težište trokuta nalazi se na osi apscisa. Vrh A je točka:

A. $A(0,-1)$ **B.** $A(0,3)$ **C.** $A(0,-2)$ **D.** $A(0,0)$



17. lekcija



17. lekcija Ponovimo

Jednadžba pravca

Pravac je skup svih točaka (x, y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu:

$$Ax + By + C = 0,$$

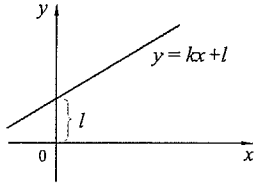
pri čemu je barem jedan od koeficijenata A, B različit od nule.

Ova se jednadžba naziva **implicitni oblik jednadžbe pravca**.

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca.

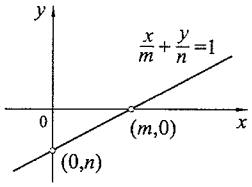
Ako pravac nije paralelan s osi ordinata, njegova se jednadžba može napisati u obliku:

$$y = kx + l.$$



Tu jednadžbu zovemo **eksplicitnim oblikok** jednadžbe pravca. Koeficijent k u eksplicitnoj jednadžbi pravca zovemo **koeficijentom smjera**. Koeficijent l naziva se **odrezak** na osi ordinata.

Segmentni oblik jednadžbe pravca.



Ako su $(m, 0)$ i $(0, n)$ koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo **segmentnim oblikom jednadžbe pravca**.

Jednadžba pravca kroz jednu točku.

Jednadžba pravca koji prolazi točkom $A(x_1, y_1)$ i ima poznati koeficijent smjera k ima jednadžbu:

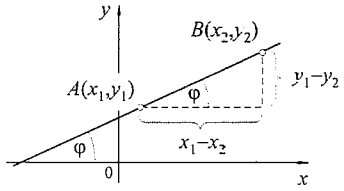
$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Jednadžba pravca kroz dvije točke.

Jednadžba pravca koji prolazi točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ glasi:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k = \operatorname{tg}\varphi.$$



gdje je φ kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa.

Udaljenost točke od pravca. Simetrala kuta

Udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ **od pravca** $p \ldots Ax + By + C = 0$ računa se formulom:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Simetrala kuta je pravac kojem je svaka točka jednako udaljena od oba kraka kuta. Dva pravca koja se sijeku određuju dva suplementarna kuta. Simetralu bilo kojeg od tih kutova možemo odrediti rabeći formulu za udaljenost točke od pravca.

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Eliminacijom znaka apsolutne vrijednosti u ovoj jednadžbi dobit ćemo simetralu obaju suplementarnih kutova koje određuju dva početna pravca.

Sjecište dvaju pravaca

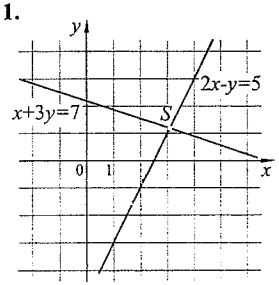
Dva se pravca, ako nisu paralelna, sijeku u jednoj točki.

Sjecište pravaca $p_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $p_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2 = 0$ dobivamo rješavajući sustav dviju linearnih jednadžbi:

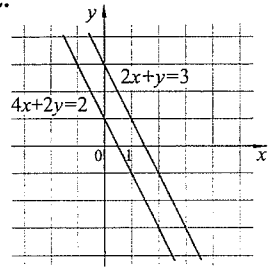
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Pritom su mogući sljedeći slučajevi:

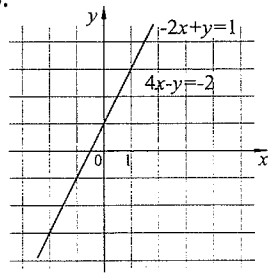
1.



2.



3.



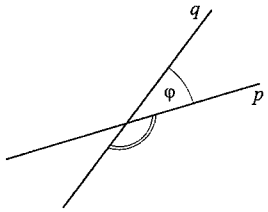
1. Presjek je jedna točka. Nužan i dovoljan uvjet za to jest da pravci ne budu paralelni, tj. da im se koeficijenti smjera razlikuju.

2. Presjek ne postoji. To će se dogoditi kad su pravci paralelni. Koeficijenti smjera im se podudaraju, ali se ne podudaraju odsječci na osi y. Tada kažemo da je sustav **nesuglasan, nemoguć**.

3. Pravci se podudaraju. Tada će sustav biti **neodređen**, njega zadovoljava bilo koja točka pravca.

Kut dvaju pravaca. Paralelnost i okomitost pravaca

Dva pravca koja se sijeku određuju dva suplementarna neorijentirana kuta. Ako pravci nisu okomiti, mjera jednog od kutova manja je od $90°$, a drugog je veća od $90°$. Kut φ između pravaca definiramo kao *manji* od tih dvaju kutova. Dakle, uvijek je:



$$0° < \varphi \leqslant 90°.$$

Za kut između paralelnih pravaca kažemo da ima mjeru $\varphi = 0°$.

Kut φ između pravaca

Kut između pravaca $p \ldots y = k_1x + l_1$ i $q \ldots y = k_2x + l_2$ računa se iz formule:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Kriteriji paralelnosti pravaca

Dva pravca zadana svojim jednadžbama u eksplicitnom ili implicitnom obliku:

$$\begin{array}{llll} p_1 & \ldots & y = k_1x + l_1 & \ldots \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ p_2 & \ldots & y = k_2x + l_2 & \ldots \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}$$

paralelna su onda i samo onda ako vrijedi:

$$k_1 = k_2,$$

odnosno:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Kriteriji okomitosti pravaca

Dva pravca zadana jednadžbama u eksplicitnom ili implicitnom obliku:

$$\begin{array}{llll} p_1 & \ldots & y = k_1x + l_1 & \ldots \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ p_2 & \ldots & y = k_2x + l_2 & \ldots \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}$$

okomita su onda i samo onda ako vrijedi:

$$k_1k_2 = -1,$$

odnosno:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

17. lekcija Primjeri

Primjer 1.

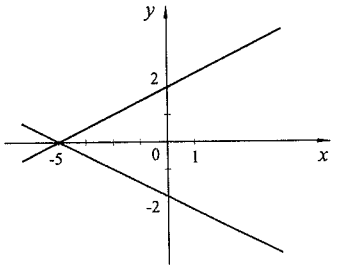
Napišimo jednadžbu pravca koji je pravcu $x - 2y + 4 = 0$ simetričan:

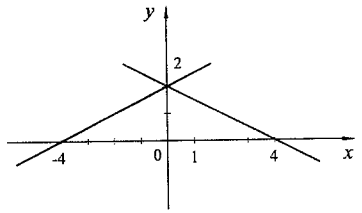
1) s obzirom na os x; **2)** s obzirom na os y;

3) s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Rješenje. **1)** Pri zrcaljenju bilo koje točke $T(x, y)$ u ravnini prema osi x toj točki se ne mijenja apscisa, a ordinati se promijeni predznak. Ona se, dakle, preslika u točku $T'(x, -y)$.

Pravac $x - 2y + 4 = 0$ zbog toga se preslika u pravac $x + 2y + 4 = 0$.



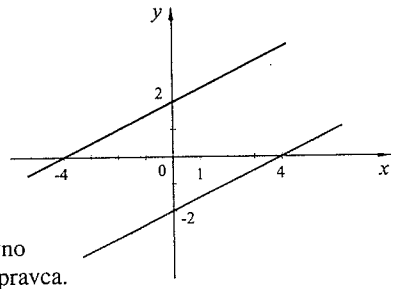


2) Pri zrcaljenju bilo koje točke $T(x, y)$ ravnine prema osi y apscisa mijenja predznak, dok ordinata ostaje ista. Točka $T(x, y)$ pri tom se zrcaljenju preslika u točku $T'(-x, y)$.

Slika pravca $x - 2y + 4 = 0$ pri simetriji prema osi y je pravac $-x - 2y + 4 = 0$, odnosno $x + 2y - 4 = 0$.

3) Kad neku točku $T(x, y)$ zrcalimo s obzirom na ishodište koordinatnog sustava, obje koordinate, i apscisa i ordinata, mijenjaju predznak. Ta se točka, dakle, preslika u točku $T'(-x, -y)$.

Slika pravca $x - 2y + 4 = 0$ zbog toga je pravac $-x + 2y + 4 = 0$, odnosno $x - 2y - 4 = 0$.



Primijetimo kako se zadatak može jednostavno riješiti primjenom segmentnog oblika jednadžbe pravca. Odredimo točke $M(-4, 0)$ i $N(0, 2)$ u kojima pravac siječe koordinatne osi.

Pri simetriji s obzirom na os x točka M preslika se u samu sebe, a točka N prelazi u točku $N'(0, -2)$. Jednadžba pravca čiji su odsječci na koordinatnim osima $m = -4$ i $n = 2$ glasi $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$.

Zadatak nastavljamo analogno rješavati dalje.

Primjer 2.

Odredimo apscisu točke $B(x,-2)$ uz uvjet da točke $A(-1,5)$, $B(x,-2)$ i $C(3,1)$ pripadaju jednom pravcu.

Rješenje. Najprije ćemo odrediti jednadžbu pravca AC. To možemo učiniti uvrštavajući koordinate tih dviju točaka u jednadžbu pravca koji je određen s dvije točke.

No, možemo taj zadatak riješiti koristeći se jednadžbom pravca u eksplicitnom obliku $y = kx + l$. Ako u tu jednadžbu najprije uvrstimo koordinate točke A, a zatim koordinate točke C, dobit ćemo sustav linearnih jednadžbi $5 = -k + l$ i $1 = 3k + l$. Njegovo je rješenje $k = -1$, $l = 4$.

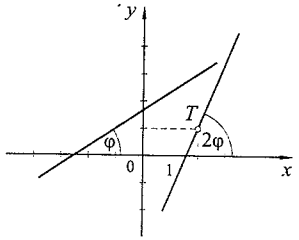
Jednadžba pravca AC glasi $y = -x + 4$.

Tom pravcu pripada i točka B, pa kad uvrstimo u jednadžbu njezine koordinate, dobit ćemo $-2 = -x + 4$, odakle je $x = 6$.

Primjer 3.

Odredimo jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(2,1)$, a s pozitivnim smjerom osi x zatvara dvostruko veći kut od pravca $2x - 3y + 5 = 0$.

Rješenje.



Kut φ što ga pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi x određen je njegovim nagibom te vrijedi $k = \operatorname{tg}\varphi$.

U našem je primjeru $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}$ te je $\varphi \approx 33°41'$. Onda je $2\varphi \approx 67°22'$.

Zaključujemo da je nagib pravca čiju jednadžbu tražimo jednak $\operatorname{tg}(2\varphi) = 2.4$.

Znademo još jednu točku pravca pa možemo odrediti i njegovu jednadžbu: $y - 1 = 2.4(x - 2)$, odnosno $y = 2.4x - 3.8$.

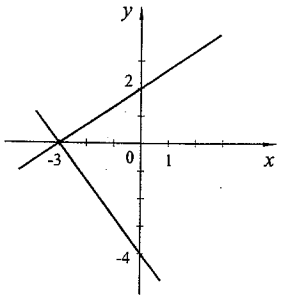
Primijetimo da smo nagib mogli izračunati i iz formule:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2k}{1 - k^2} = \frac{12}{5}.$$

Primjer 4.

Kolika je površina trokuta što ga s osi ordinata zatvaraju pravci $2x - 3y + 6 = 0$ i $4x + 3y + 12 = 0$?

Rješenje. Rješenje sustava jednadžbi što ga tvore jednadžbe dvaju zadanih pravaca je $x = -3$, $y = 0$. To znači da se ti pravci sijeku u točki $(-3,0)$.



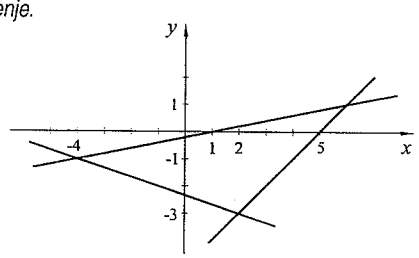
Na slici je istaknut trokut što ga pravci zatvaraju s osi ordinata. Duljina stranice trokuta koja leži na osi ordinata jednaka je 6, a duljina visine na tu stranicu iznosi 3.

Površina trokuta jednaka je $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ kv. jed.

Primjer 5.

Odredimo kutove trokuta čije stranice leže na pravcima $x + 3y + 7 = 0$, $x - y - 5 = 0$ i $x - 5y - 1 = 0$.

Rješenje.



Koeficijenti smjera ovih triju pravaca su redom: $k_1 = -\frac{1}{3}$, $k_2 = 1$, $k_3 = \frac{1}{5}$. Iz formule $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ sada redom računamo kutove između svaka dva od zadanih pravaca.

Tako dobijemo $\alpha = 29°44'41''$, $\beta = 63°26'5''$, $\gamma = 33°41'24''$.

Uočavamo kako je zbroj ovih kutova manji od $180°$, pa znači da je trokut tupokutan. Naime, zbog toga što navedenom formulom računamo kut između dvaju pravaca, a uzima se da je on manji od dva kuta kojega tvore dva pravca što se sijeku u jednoj točki, jasno je da smo dobili sva tri šiljasta kuta.

Nacrtamo sliku i zaključimo da je kut β tup, $\beta = 116°33'55''$.

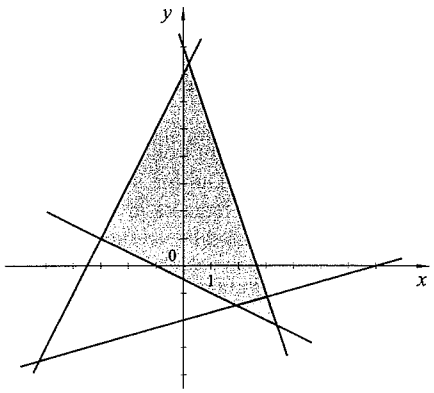
Kutovi trokuta što ga zatvaraju tri zadana pravca jesu: $\alpha = 29°44'41''$, $\beta = 116°33'55''$ i $\gamma = 33°41'24''$.

Primjer 6.

Točkom $T(3,-1)$ položimo pravac koji će s pravcima $2x - y + 7 = 0$ i $x + 2y + 1 = 0$ zatvarati jednakokračan trokut.

Rješenje. Odmah valja uočiti kako su zadani pravci međusobno okomiti. Zbog toga će ostala dva kuta trokuta biti po $45°$. Koeficijent smjera prvog pravca je $k_1 = 2$, a koeficijent smjera pravca koji tražimo neka je k. Tada je $\operatorname{tg} 45° = \left|\frac{k-2}{1+2k}\right| = 1$. Odatle slijedi $|k-2| = |1+2k|$, te je $k-2 = 1+2k$ ili $k-2 = -1-2k$.

U prvom je slučaju $k = -3$, a u drugom $k = \frac{1}{3}$.



Dva pravca, $y = -3x + 8$ i $y = \frac{1}{3}x - 2$ zadovoljavaju uvjete zadatka.

Primjer 7.

Točkom $T(-1,4)$ položimo dva okomita pravca koji s osi apscisa zatvaraju trokut površine 20.

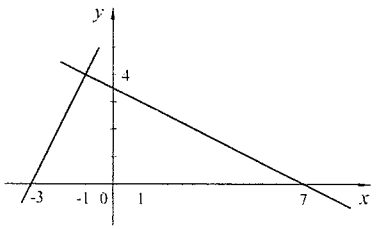
Rješenje. Ako je k koeficijent smjera jednog pravca, onda je koeficijent smjera drugog $-\frac{1}{k}$. Jednadžbe tih pravaca možemo zapisati, koristeći se jednadžbom pravca kroz jednu točku, u obliku $y = kx + k + 4$, odnosno $y = -\frac{1}{k}x + \frac{4k-1}{k}$.

Odsječak prvog pravca na osi x je $x_1 = -\frac{k+4}{k}$, a drugoga $x_2 = 4k - 1$.

Sada možemo postaviti jednakost $P = \frac{1}{2} \cdot |x_2 - x_1| \cdot y_T$. Nakon uvrštavanja x_1, x_2, $x_T = 4$ i $P = 20$, dobit ćemo jednadžbu $10 = \left|\frac{4k^2+4}{k}\right|$, odnosno $2k^2 - 5|k| + 2 = 0$.

Ova jednadžba, za $k > 0$ prima oblik $2x^2 - 5k + 2 = 0$ i daje dva rješenja zadatka:

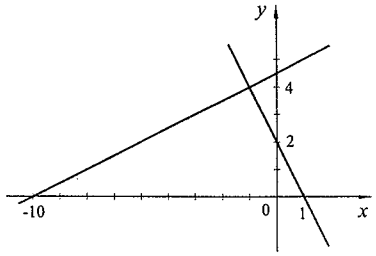
(1) $k = 2$.



U ovom slučaju jedan je pravac $y = 2x + 6$, drugi $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. Njihovi su odsječci na osi x jednaki $x_1 = -3$, $x_2 = 7$, pa je duljina osnovice trokuta 10, a površina 20.

(2) $k = \frac{1}{2}$.

Jedan je pravac $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, i on presijeca os x u točki s apscisom $x_1 = -9$. Jednadžba drugog pravca glasi $y = -2x + 2$, a taj pravac siječe os x u točki s apscisom $x = 1$.



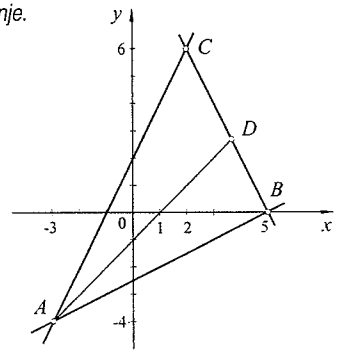
Lako je provjeriti da i ovo rješenje ispunjava uvjete zadatka.

U slučaju $k < 0$ imamo kvadratnu jednadžbu $2k^2 + 5k + 2 = 0$. Slijedi $k = -2$ ili $k = -\frac{1}{2}$ pa vidimo da ne dobivamo novih rješenja.

Primjer 8.

Vrhovi trokuta $\triangle ABC$ su točke $A(-3,-4)$, $B(5,0)$, $C(2,6)$. U kojoj se točki sijeku simetrala kuta α i visina iz vrha C toga trokuta?

Rješenje.



Jednadžba pravca AB glasi $x - 2y - 5 = 0$, a jednadžba pravca AC je $2x - y + 2 = 0$.

Odredimo simetralu kuta α:

$$\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}.$$

Odatle dobijemo dva pravca, jedan $x + y + 7 = 0$ i drugi $x - y - 1 = 0$.

Ta su dva pravca osi simetrije dvaju pravaca AB i AC, a drugi je simetrala kuta α.

Sada odredimo jednadžbu pravca kojem pripada visina iz vrha C trokuta. Najprije, jednadžba stranice $\overline{BC}$ je $2x + y - 10 = 0$. No, primijetimo kako je trokut $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Naime $k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$. Zato je visina iz vrha C na pravcu BC.

Sjecište simetrale kuta α i visine iz vrha C je točka $D\left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Primjer 9.

Stranice kvadrata leže na pravcima $4x - 3y + 11 = 0$ i $4x - 3y + 1 = 0$. Kolika je površina kvadrata?

Rješenje. Dani su pravci paralelni pa je njihova udaljenost jednaka duljini stranice kvadrata. Tu udaljenost odredit ćemo tako što ćemo na jednom od dvaju pravaca odabrati točku pa izračunati njezinu udaljenost do drugog pravca.

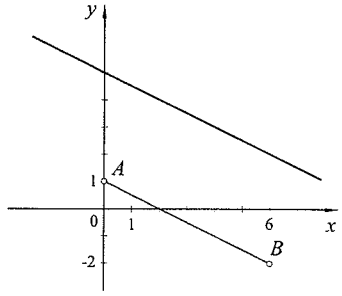
Ako zapišemo jednadžbu prvog pravca u obliku $y = \frac{4x+11}{3}$, lako je uočiti kako se za $x = 1$ dobije $y = 5$. Tako smo dobili točku $T(1,5)$, a njezina je udaljenost od drugog pravca jednaka $d = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2$.

Površina kvadrata jednaka je 4 kv. jed.

Primjer 10.

Točke $A(0,1)$ i $B(6,-2)$ dva su vrha trokuta $\triangle ABC$, a treći je vrh C na pravcu $mx + 2y - 10 = 0$. Odredimo m tako da površina trokuta ne ovisi o izboru točke C.

Rješenje. Ako je zadana jedna stranica trokuta, a treći vrh C se mijenja, i to tako da je površina trokuta uvijek ista, onda to znači da taj treći vrh leži na pravcu paralelnom stranici $\overline{AB}$. Zato m moramo odrediti iz tog uvjeta. Najprije odredimo $k_{AB} = \frac{-2-1}{6-0} = -\frac{1}{2}$. Zatim odredimo m tako da je $-\frac{m}{2} = -\frac{1}{2}$. Slijedi $m = 1$.



Iz skupa pravaca $mx + 2y - 10 = 0$ izdvojili smo sada onaj ($x + 2y - 10 = 0$) koji je paralelan s pravcem AB. Ako točka C mijenja svoj položaj "klizeći" po pravcu $x + 2y - 10 = 0$, površina trokuta $\triangle ABC$ neće se mijenjati.

Primjer 11.

Za koji realni broj m su pravci $2mx + 3y + 2 = 0$ i $2x + my - 1 = 0$ međusobno paralelni, a za koji su okomiti?

Rješenje. Pravci su paralelni ako imaju jednake koeficijente smjera. Koeficijent prvog pravca jednak je $k_1 = -\frac{2m}{3}$, a koeficijent drugog $k_2 = -\frac{2}{m}$.

Iz uvjeta $k_1 = k_2$ slijedi $-\frac{2m}{3} = -\frac{2}{m}$, a odatle je $m = \sqrt{3}$ ili $m = -\sqrt{3}$.

Dvije su vrijednosti od m za koje su pravci paralelni.

Uvjet okomitosti dvaju pravaca je $k_1 \cdot k_2 = -1$. Kad uvrstimo k_1 i k_2, dobijemo $\frac{4}{3} = -1$. Kako je ova jednakost netočna, onda bi se moglo zaključiti kako dva pravca nisu okomita ni za koju vrijednost realnog parametra m.

No, tu valja biti oprezan. Razmatrajući sve pravce kojima je nagib $-\frac{2}{m}$ iz skupa pravaca zadanih drugom jednadžbom, ispustili smo one koji su okomiti na os x. Njihov se nagib ne definira. Stoga još valja pogledati odnos dvaju pravaca kada je $m = 0$. Tada prva jednadžba glasi $3y + 2 = 0$ i njome je zadan pravac paralelan s osi x.

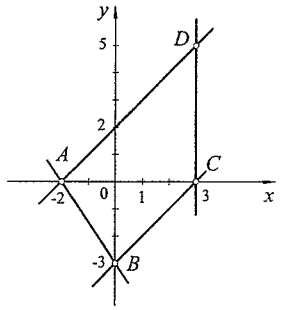
A druga jednadžba $2x - 1 = 0$ određuje pravac okomit na os x.

I tako su dva zadana pravca okomita za $m = 0$, jedan je paralelan s osi x, drugi s osi y. Pravci se sijeku u točki $S\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$.

Primjer 12.

Kolika je površina dijela ravnine koji je određen sustavom nejednadžbi: $x - y + 2 \leqslant 0$, $x - y - 3 \leqslant 0$, $x - 3 \leqslant 0$, $3x + 2y + 6 \geqslant 0$?

Rješenje.



Odredimo najprije skup točaka $T(x,y)$ ravnine koji je određen uvjetom $x - y + 2 \geqslant 0$. Nejednakost zapišimo u obliku $y \leqslant x + 2$ i zaključimo kako je riječ o poluravnini ispod pravca $y = x + 2$. Na sličan način odredimo poluravnine određene ostalim trima nejednakostima. Presjek četiriju poluravnina jest trapez, njegova je površina 20 kv. jed.

Presjek četiriju poluravnina jest trapez. Presjek četiriju poluravnina jest trapez $ABCD$; $A(-2,0)$, $B(0,-3)$, $C(3,0)$, $D(3,5)$.

Njegova površina zbroj je površina dvaju trokuta, trokuta $\triangle ABC$ i trokuta $\triangle ACD$. Oba imaju zajedničku osnovicu $\overline{AC}$ duljine 5. Visina prvoga je 3, drugoga 5.

Tako je površina trapeza jednaka $P = \frac{25}{2} + \frac{15}{2} = 20$ kv. jed.

17. lekcija Zadaci

1. Odredite nepoznate koordinate točaka $E(x,-3)$ i $F(-1,y)$ ako one pripadaju pravcu AB, $A(-3,4)$, $B(5,0)$.

2. Zadane su točke $A(0,-3)$, $B(4,3)$ i $C(-5,2)$. Kolika je površina trokuta što ga pravci AB i AC zatvaraju s osi x?

3. Odredite realni broj a tako da sva tri pravca $ax+y+1=0$, $x+ay+1=0$ i $2x-3y+1=0$ prolaze jednom točkom.

4. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi sjecištem pravca $3x+4y+6=0$ s osi x, a s osi x zatvara dvostruko manji kut od njega.

5. Zraka svjetlosti prolazi točkom $A(-1,5)$ i nakon refleksije na osi x prođe točkom $B(5,3)$. U kojoj se točki na osi x zraka odbila?

6. Točke $A_1(-1,2)$, $B_1(2,1)$ i $C_1(1,3)$ polovišta su stranice trokut $\triangle ABC$. Napišite jednadžbe stranica trokuta.

7. Odredi jednadžbu simetrale dužine $\overline{AB}$ ako je $A(-1,4)$, $B(7,0)$. Kolika je površina trokuta što ga simetrala zatvara s koordinatnim osima?

8. Točkom $T(-3,3)$ položite pravac tako da konveksni četverokut što ga zatvara taj pravac, pravci $x+3=0$ i $x-1=0$ i os x ima površinu 16.

9. Sjecištem pravca $y=-3x+6$ s osi y položite pravac koji će sa zadanim pravcem i osi x zatvarati trokut površine 15.

10. Dvije stranice paralelograma $ABCD$ pripadaju pravcima $7x-6y+2=0$ i $5x-2y+6=0$. Ako je $C(6,10)$ jedan vrh paralelograma, odredite ostala tri vrha.

11. Kolika je udaljenost pravca $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ od ishodišta koordinatnog sustava?

12. Kolika je površina pravokutnika čije su dvije stranice na pravcima $x-2y+3=0$ i $2x+y-5=0$, a jedan je vrh točka $C(-3,1)$?

13. Odredite os simetrije dvaju pravaca $2x-3y+3=0$ i $2x-3y+9=0$.

14. Odredite točku koja je simetrična ishodištu koordinatnog sustava s obzirom na pravac koji prolazi točkama $A(-3,4)$ i $B(5,0)$.

15. Točka $A(-3,2)$ nožište je okomice položene iz ishodišta koordinatnog sustava na pravac p. Odredite jednadžbu pravca p.

16. Dvije stranice pravokutnika pripadaju pravcima $3x-2y+11=0$ i $2x+3y-8=0$. Jedan je vrh pravokutnika točka $A(-1,-1)$. Kolika je površina pravokutnika?

17. Koliki je kut što ga zatvaraju pravci $2x-3y+1=0$ i $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$?

18. Točkom $T(2,-1)$ položite pravac koji s pravcem $2x+3y+6=0$ zatvara kut od $45°$.

17. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Točke $A(m+n,1)$ i $B(m-n,-1)$ pripadaju pravcu $2x-3y+11=0$. Tada je:
A. $mn=7.5$ **B.** $mn=-2$ **C.** $mn=-8.25$ **D.** $mn=-1$

2. Jednadžba pravca koji je simetričan pravcu $2x-3y+6=0$ s obzirom na ishodište koordinatnog sustava glasi:
A. $y=\frac{2}{3}x-2$ **B.** $y=-\frac{3}{2}x-2$ **C.** $y=-\frac{2}{3}x+2$ **D.** $y=\frac{3}{2}x+2$

3. Nagib pravca $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ jednak je:
A. $\frac{n}{m}$ **B.** $-\frac{1}{m}$ **C.** $-\frac{n}{m}$ **D.** $\frac{1}{n}$

4. Pravac p prolazi sjecištem pravaca $3x+2y-6=0$ i $2x-y-4=0$ paralelno pravcu koji je određen točkama $A(-1,1)$ i $B(2,-2)$. Jednadžba pravca p glasi:
A. $y=-x+3$ **B.** $y=-3x+4$ **C.** $y=-x+5$ **D.** $y=-x+2$

5. Sjecište pravca AB, $A(-3,3)$, $B(5,-1)$ s osi x je točka:
A. $M(-1,0)$ **B.** $M(0,0)$ **C.** $M(1,0)$ **D.** $M(3,0)$

6. Dijagonala $\overline{AC}$ kvadrata $ABCD$ pripada pravcu $x-2y-1=0$. Jedan vrh kvadrata je točka $B(-2,1)$. Površina kvadrata iznosi:
A. 15 kv. jed. **B.** 10 kv. jed. **C.** 12 kv. jed. **D.** 16 kv. jed.

7. Simetrala dužine $\overline{AB}$, $A(-4,0)$, $B(0,-2)$ os x siječe u točki $M(m,0)$, a os y u točki $N(0,n)$. Tada je:
A. $m+n=-\frac{2}{3}$ **B.** $m+n=3$ **C.** $m+n=\frac{3}{2}$ **D.** $m+n=-2$

8. Pravac $3x-4y+1=0$ s pravcem $x+1=0$ zatvara kut φ za koji vrijedi:
A. $\cos\varphi=0.8$ **B.** $\cos\varphi=0.5$ **C.** $\cos\varphi=0.75$ **D.** $\cos\varphi=0.6$

9. Pravac $x-2y+3=0$ treba zakrenuti za kut α oko sjecišta s pravcem $y=3x-1$ kako bi se poklopio s tim drugim pravcem. Tada je:
A. $\alpha=30°$ **B.** $\alpha=45°$ **C.** $\alpha=60°$ **D.** $\alpha=90°$

10. Površina lika koji je omeđen pravcima $y+2=0$ i $2x-3y-12=0$ i s koordinatnim osima jednaka je:
A. 6 kv. jed. **B.** 12 kv. jed. **C.** 8 kv. jed. **D.** 9 kv. jed.

Ispit 2

1. Pravac p prolazi točkom $A(-3,1)$ paralelno pravcu $x-2y+5=0$. Jednadžba pravca p glasi:
   A. $x-2y+5=0$ **B.** $x+2y+1=0$ **C.** $2x-y+7=0$ **D.** $x-2y-5=0$

2. Ishodištem treba položiti pravac koji s osi apscisa i pravcem $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ zatvara trokut površine 4.5 kv. jed. Ako je nagib pravca pozitivan broj, onda je on jednak:
   A. 2 **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** $\frac{7}{2}$

3. Jednadžba pravca koji je simetričan pravcu $x-y+1=0$ s obzirom na pravac $x-1=0$ glasi:
   A. $y=-x+1$ **B.** $y=x+2$ **C.** $y=-x+3$ **D.** $y=x+4$

4. Sustavom nejednadžbi $2x-3y+6\geq 0$ i $2x-3y-6\leq 0$ određen je skup točaka ravnine. Tom skupu pripada točka:
   A. $T_1(-3,1)$ **B.** $T_2(2,3)$ **C.** $T_3(-1,-3)$ **D.** $T_4(-2,2)$

5. Duljina odsječka što ga na pravcu $3x-5y+15=0$ odsijecaju koordinatne osi približno je jednaka:
   A. 6.25 jed. **B.** 5.83 jed. **C.** 7.44 jed. **D.** 4.85 jed.

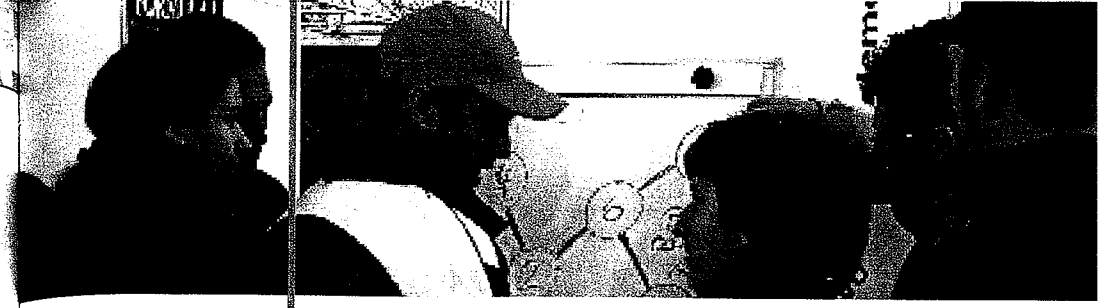
6. Dvije stranice kvadrata pripadaju pravcima $3x-4y+9=0$ i $3x-4y-1=0$. Površina toga kvadrata jednaka je:
   A. 12 kv. jed. **B.** 8 kv. jed. **C.** 4 kv. jed. **D.** 9 kv. jed.

7. Pravci s nagibima k_1 i k_2, $0<k_1<k_2$, zatvaraju kut od $45°$. Tada vrijedi jednakost:
   A. $(1-k_1)(1-k_2)=2$ **B.** $(1+k_1)(1-k_2)=1$
   C. $(1-k_1)(1+k_2)=2$ **D.** $(1-k_1)(1-k_2)=-2$

8. Točke $A(-1,-3)$, $B(3,1)$ i $C(0,3)$ vrhovi su trokuta $\triangle ABC$. Visina iz vrha A pripada pravcu kojemu je jednadžba:
   A. $3x+2y-6=0$ **B.** $2x-3y+6=0$ **C.** $2x-2y-3=0$ **D.** $3x-2y-3=0$

9. Kut što ga zatvaraju pravci $x+\sqrt{3}y-11=0$ i $\sqrt{3}x-3y-13=0$ jednak je:
   A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

10. Simetrala tupog kuta što ga zatvaraju pravci $2x-y-5=0$ i $4x+2y+3=0$ je pravac čija je jednadžba:
    A. $8x-7=0$ **B.** $4y-5=0$ **C.** $4y+13=0$ **D.** $5x-11=0$



18. lekcija

Kružnica

18. lekcija Ponovimo

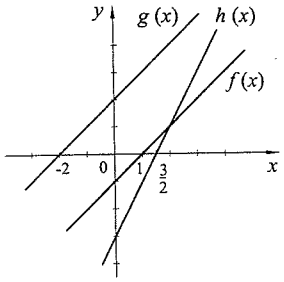
Jednadžba kružnice

Opća jednadžba kružnice.

Jednadžbom:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

zadana je kružnica, jedna točka ili prazan skup.



Jednadžba kružnice sa središtem u točki $S(p, q)$ i polumjerom r glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2.$$

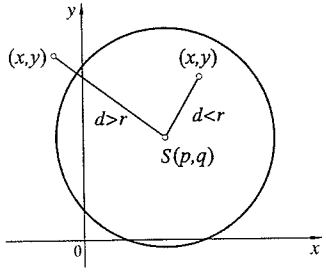
Ako je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava, jednadžba kružnice glasi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ova se kružnica zove **središnja** ili **centralna kružnica**.

Krug

Zatvoreni krug sa središtem $S(p, q)$ je skup svih točaka (x, y) ravnine za koje vrijedi:



$$(x - p)^2 + (y - q)^2 \leqslant r.$$

Njemu pripadaju točke na kružnici.

Otvoreni krug sa središtem $S(p, q)$ je skup svih točaka (x, y) ravnine za koje vrijedi:

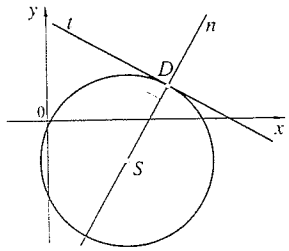
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 < r.$$

On ne sadrži točke kružnice.

Pravac i kružnica

Poučak o tangenti kružnice.

Neka je D točka na kružnici, a S njezino središte. Pravac t koji prolazi točkom D tangenta je kružnice onda i samo onda ako je okomit na spojnicu SD.



Uvjet dodira pravca i kružnice.

Pravac s jednadžbom $y = kx + l$ dira kružnicu $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ onda i samo onda ako vrijedi:

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2.$$

Jednadžba normale u točki $T(x_1, y_1)$ na kružnici glasi:

$$y - q = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - p).$$

Jednadžba tangente u točki $T(x_1, y_1)$ na kružnici glasi:

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2.$$

Kut pod kojim pravac siječe kružnicu.

Kut između tog pravca i tangente na kružnicu u točki presjeka pravca i kružnice. Neka je k_1 koeficijent smjera pravca, a k_2 koeficijent smjera tangente; tada vrijedi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Kut pod kojim se sijeku dvije kružnice.

Kut koji zatvaraju tangente tih kružnica povučene u točki njihova presjeka.

Napomena! Ako se traži tangenta $t \ldots y = kx + l$ na kružnicu $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ iz točke $T(x_T, y_T)$ koja *nije* na kružnici, treba se riješiti sustav:

$$\begin{cases} y_T = kx_T + l \\ r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2. \end{cases}$$

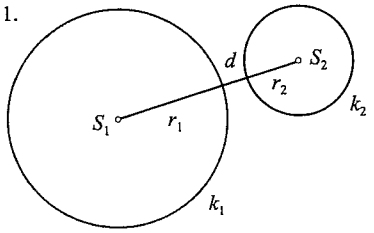
Rješenja sustava su k i l koji nam određuju traženu tangentu.

Međusobni položaj dviju kružnica

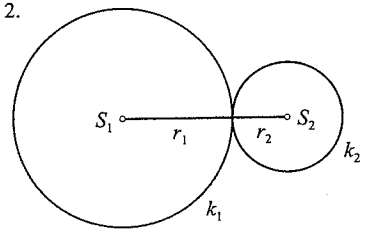
Neka su r_1 i r_2 polumjeri dviju kružnica k_1 i k_2, te d udaljenost njihovih središta. Pretpostavimo da je $r_2 > r_1$. Moguće su sljedeće situacije:

1. $d > r_1 + r_2$, kružnice nemaju zajedničkih točaka;
2. $d = r_1 + r_2$, kružnice imaju samo jednu zajedničku točku;
3. $r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$, kružnice se sijeku u dvjema točkama;
4. $d = r_2 - r_1$, kružnice se diraju iznutra;
5. $d < r_2 - r_1$, kružnice nemaju zajedničkih točaka, manja se nalazi unutar veće.

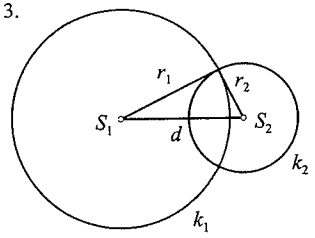
1.



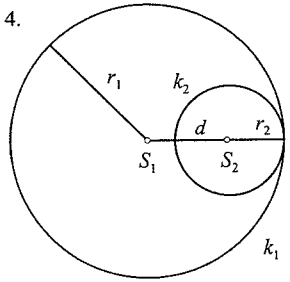
2.



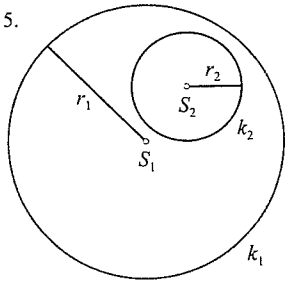
3.



4.



5.



18. lekcija Primjeri

Primjer 1.

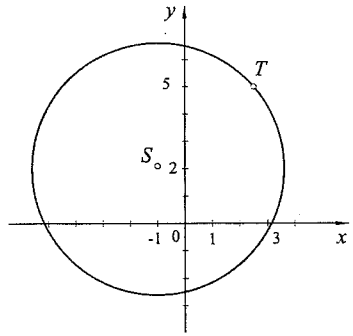
Napišimo jednadžbu kružnice kojoj je središte točka $S(-1,2)$ i koja prolazi točkom $T(3,5)$.

Rješenje. Kružnica je potpuno određena, jer zadano je njezino središte, te je polumjer $r = |ST|$. Izračunajmo:

$$|ST| = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Jednadžba kružnice glasi:

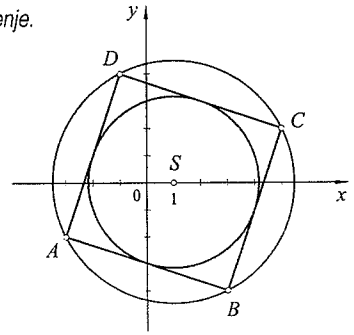
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$



Primjer 2.

Dužina $\overline{AC}$, $A(-3,-2)$, $C(5,2)$ dijagonala je kvadrata. Kako glasi jednadžba kružnice upisane, a kako kružnice opisane tomu kvadratu?

Rješenje.



Središte obiju kružnica je središte kvadrata. Ista je točka polovište $S(1,0)$ dijagonale $\overline{AC}$. Duljina dijagonale jednaka je $|AC| = 4\sqrt{5}$. Označimo li s a duljinu stranice kvadrata, onda je $4\sqrt{5} = a\sqrt{2}$. Odatle je $a = 4 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Polumjer kružnice upisane kvadratu jednak je $\frac{a}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Jednadžba kružnice upisane kvadratu glasi: $(x-1)^2 + y^2 = 10$.

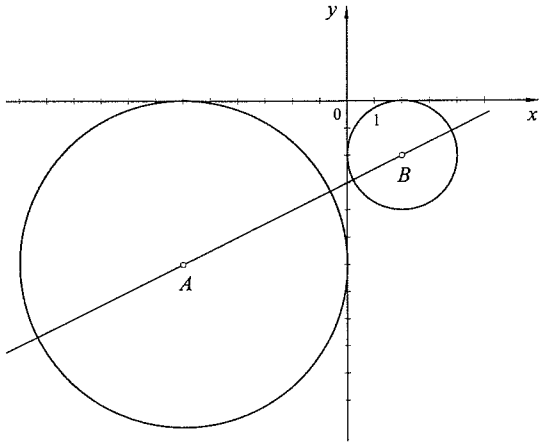
Polumjer kružnice opisane kvadratu jednak je polovini dijagonale kvadrata, $r = 2\sqrt{5}$.

Jednadžba kružnice opisane kvadratu ima jednadžbu $(x-1)^2 + y^2 = 20$.

Primjer 3.

Napišimo jednadžbu kružnice koja dira obje koordinatne osi, a središte joj je na pravcu $x - 2y - 6 = 0$.

Rješenje. Ako kružnica dira obje koordinatne osi, onda je $r = |p| = |q|$. No, središte $S(p, q)$ kružnice je na pravcu $x - 2y - 6 = 0$, što znači da vrijedi $p - 2q - 6 = 0$. Odatle je $p = 2q + 6$. Iz $|p| = |q|$ sada slijedi $|2q + 6| = |q|$.



Imamo dva rješenja zadatka. Jedno proistječe iz $2q + 6 = q$, a drugo iz $2q + 6 = -q$. Iz prvoga slijedi $q = -6$, pa je i $p = -6$, a iz drugoga $q = -2$ i $p = 2$. Postoje, dakle, dvije kružnice čije je središte na pravcu $x - 2y - 6 = 0$ i koje diraju obje koordinatne osi. Njihove su jednadžbe: $(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 36$ i $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

Primjer 4.

Koliki mora biti parametar $m \in \mathbf{R}$ da bi jednadžba:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + m = 0,$$

bila jednadžba kružnice?

Rješenje. Iz jednadžbe čitamo da je $p = 3$, $q = -5$ pa prema tome jednadžba glasi:

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 5)^2 - 25 + m = 0.$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 34 + m = 0.$$

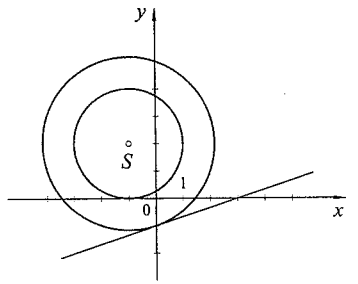
Da bi to bila jednadžba kružnice, mora vrijediti:

$$34 - m > 0 \implies m < 34.$$

Primjer 5.

Napišimo jednadžbu kružnice koja je koncentrična kružici $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ i koja dira pravac $x - 3y - 3 = 0$.

Rješenje. Jednadžbu dane kružnice možemo dopunjavanjem do potpunog kvadrata zapisati u obliku $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Središte te kružnice je točka $S(-1, 2)$.



Nadalje, ako je pravac tangenta kružnice, onda je polumjer kružnice jednak udaljenosti njezina središta od tangente.

Valja, dakle, izračunati udaljenost točke $S(-1, 2)$ od pravca $x - 3y - 3 = 0$. Ta je udaljenost jednaka:

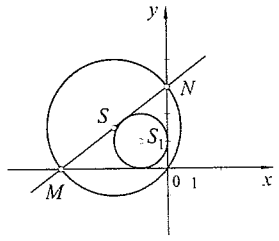
$$r = \frac{|-1 - 3 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Jednadžba tražene kružnice glasi $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

Primjer 6.

Odredimo jednadžbu kružnice opisane trokutu što ga s koordinatnim osima zatvara pravac $3x - 4y + 12 = 0$. Kako glasi jednadžba kružnice upisane tomu trokutu?

Rješenje.



Pravac presijeca koordinatne osi u točkama $M(-4, 0)$ i $N(0, 3)$. Trokut kojemu treba opisati kružnicu je pravokutan. Prema *Talesovu poučku* središte kružnice opisane pravokutnom trokutu u polovištu je hipotenuze $\overline{MN}$ trokuta. Središte kružnice je točka $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, polumjer je jednak $\frac{5}{2}$.

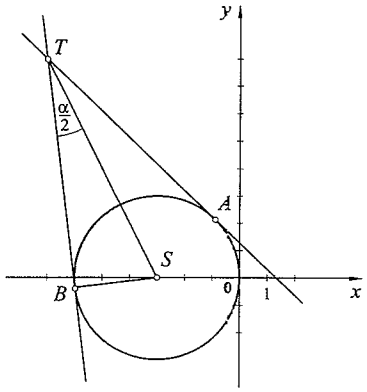
Jednadžba kružnice glasi $(x + 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Središte upisane kružnice trokutu je točka $S_1(-r_1, r_1)$, gdje je r_1 polumjer kružnice. Njega ćemo odrediti iz površine trokuta. Površina trokuta jednaka je $P = 6$, a opseg trokuta iznosi 12. Iz formule $P = r_1 \cdot s$ nalazimo $r_1 = 1$. Jednadžba kružnice upisane trokutu glasi: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Primjer 7.

Koliki kut zatvaraju tangente položene iz točke $T(-7,8)$ na kružnicu $x^2+y^2+6x=0$?

Rješenje. Jednadžbu kružnice zapišimo u obliku $(x+3)^2+y^2=9$. Zaključujemo: središte je kružnice točka $S(-3,0)$ na osi x, njezin je polumjer $r=3$.

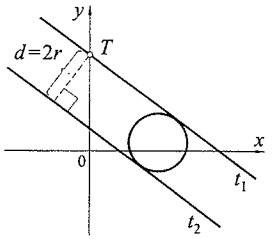


Udaljenost točaka S i T iznosi $d=|ST|=4\sqrt{5}$. I sada, iz trokuta $\triangle SBT$ računamo: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4\sqrt{5}}\approx 0.3354$, te slijedi $\frac{\alpha}{2}=19°35'51''$. I konačno, tangente povučene na danu kružnicu iz točke $T(-7,8)$ zatvaraju kut $\alpha=39°11'42''$.

Primjer 8.

Pravci $t_1\ldots 3x+4y-13=0$ i $3x+4y-3=0$ su tangente neke kružnice. Kolika je površina kruga određenoga tom kružnicom?

Rješenje.



Ta su dva pravca paralelna (imaju iste koeficijente smjera) pa je promjer kružnice jednak međusobnoj udaljenosti tih pravaca. Uzmimo jednu točku koja pripada prvom pravcu, npr. točku $T=\left(0,\frac{13}{4}\right)$. Udaljenost između točke T i drugog pravca je:

$$d=\frac{\left|3\cdot 0+4\cdot\frac{13}{4}-3\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

S obzirom na $d=2r$, zaključujemo da je $r=1$. Površina kruga jednaka: je

$$P=r^2\pi=\pi.$$

Primjer 9.

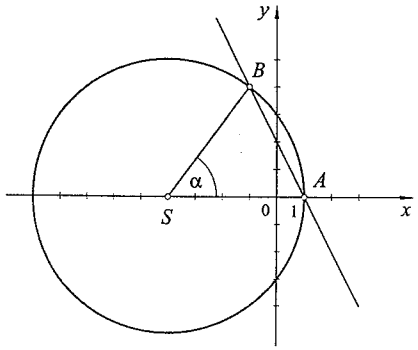
Koliki je središnji kut koji pripada tetivi što je kružnica $x^2+y^2+8x-9=0$ odsijeca na pravcu $2x+y-2=0$?

Rješenje. Središte kružnice je točka $S(-4,0)$, njezin je polumjer jednak 5.

Kad riješimo sustav jednadžbi danog pravca i dane kružnice, dobit ćemo rješenja $x=1$, $y=0$ i $x=-1$, $y=4$, što su koordinate točaka A i B u kojima se sijeku pravac i kružnica.

Kako je dužina $\overline{SA}$ na osi x, onda je središnji kut tetive $\overline{AB}$ jednak kutu što ga pravac SB zatvara s osi x. A taj kut ćemo odrediti iz nagiba pravca SB, ili jednostavno iz $\sin\varphi=\frac{y_B}{r}=\frac{4}{5}$.

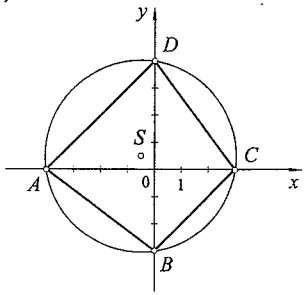
Tako dobijemo $\varphi=53°7'48''$.



Primjer 10.

Odredimo površinu četverokuta kojem su vrhovi točke u kojima kružica $x^2+y^2+x-y-12=0$ siječe koordinatne osi.

Rješenje.



Točke u kojima kružnica siječe os x one su njezine točke za koje je $y=0$. Tako dolazimo do kvadratne jednadžbe $x^2+x-12=0$, odakle je $x=-4$ ili $x=3$.

Analogno, točke u kojima kružnica siječe os y dobiju se iz uvjeta $x=0$ i tada iz jednadžbe $y^2-y-12=0$ nalazimo $y=-3$ ili $y=4$.

Istaknimo na koordinatnim osima nađene točke. One određuju četverokut čiju površinu trebamo izračunati.

To je četverokut s okomitim dijagonalama i njegova je površina jednaka polovini umnoška duljina dijagonala.

Dakle iz $P=\frac{e\cdot f}{2}$ slijedi:

$$P=\frac{7\cdot 7}{2}=\frac{49}{2}.$$

18. lekcija Zadaci

1. Napišite jednadžbu kružnice čije je središte na osi apscisa i koja dira pravce $x-3=0$ i $y+2=0$.

2. Napišite jednadžbu kružnice kojoj je središte na pravcu $x+y=0$, koja dira obje koordinatne osi, a duljina polumjera jednaka je 3.

3. Odsječak što ga na pravcu $3x+4y+12=0$ odsijecaju koordinatne osi promjer je kružnice. Kako glasi njezina jednadžba?

4. Odredite jednadžbu kružnice koja dira os x u ishodištu i koja dira kružnicu $(x-6)^2+(y-13)^2=25$.

5. Napišite jednadžbu kružnice koja je koncentrična kružnici $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ i koja dira pravac $x-3y-3=0$.

6. Dužina $\overline{AB}$, $A(-6,-2)$, $B(2,4)$, promjer je kružnice. Odredite jednadžbu kružnice koja joj je koncentrična, a dira pravac $x-4=0$.

7. Koliki je središnji kut što pripada tetivi koja je određena sjecištima pravca $2x+y-2=0$ i kružnice $x^2+y^2+8x-9=0$?

8. Odredite jednadžbu kružnice kojoj je promjer zajednička tetiva dviju kružnica $(x-6)^2+(y-3)^2=16$ i $x^2+(y-3)^2=40$.

9. Kolika je površina dijela ravnine koji je omeđen kružnicama $x^2+y^2-4x+1=0$ i $x^2+y^2-4x-1=0$?

10. Kružnica prolazi točkama $A(-3,2)$ i $B(1,0)$, a središte joj je na pravcu $y=x+4$. Odredite jednadžbu te kružnice.

11. Kružnica prolazi točkama $A(2,4)$ i $B(6,8)$ i dira os x. Kako glasi njezina jednadžba?

12. Napišite jednadžbu kružnice koja je simetrična kružnici $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ s obzirom na pravac $y=x+3$.

13. Središte kružnice je točka $S(3,5)$, a pravac $x+y-10=0$ njezina je tangenta. Odredite jednadžbu kružnice.

14. Koja je točka kružnice $x^2+y^2+6x-2y=0$ najbliža pravcu $y=-3x+12$?

15. Točkom $T(-2,1)$ položena je tangenta na kružnicu $x^2+y^2-10x-7=0$. Kako glasi jednadžba tangente?

16. Dužina $\overline{AB}$, $A(-2,-3)$, $B(6,3)$ hipotenuza je pravokutnog trokuta kojem je vrh pravog kuta na pravcu $y-4=0$. Odredite koordinate vrha C.

17. Koliki kut zatvaraju tangente položene na kružnicu $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ u njezinim sjecištima s osi x?

18. Kolika je površina dijela ravnine koji je određen sustavom nejednadžbi: $x^2+y^2\leq 4$ i $|x|-2y\leq 0$.

19. U sjecištima pravca $3x+y-5=0$ i kružnice $x^2+y^2-2x+6y+5=0$ položene su tangente na kružnicu. Izračunajte površinu trokuta kojem su vrhovi dirališta i sjecište tangenata.

20. Iz točke $P(2,-3)$ položene su tangente na kružnicu $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Odredite jednadžbu pravca koji spaja dirališta.

18. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Središte kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$, $A(2,6)$, $B(-15,-11)$, $C(9,-1)$ je točka:

A. $S(-2,-5)$ **B.** $S(-3,5)$ **C.** $S(3,0)$ **D.** $S(-3,-6)$

2. Jednadžba kružnice koja prolazi točkama $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,4)$ glasi:

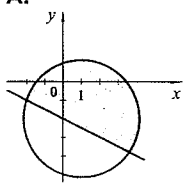
A. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2=4$
C. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

3. Površina kružnog vijenca jednaka je π. Ako je jednadžba veće kružnice koja ga omeđuje $x^2+y^2-2x+6y+1=0$, jednadžba manje je:

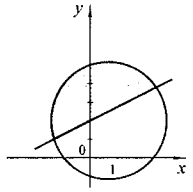
A. $x^2+y^2-2x+6y+2=0$ **B.** $x^2+y^2+2x-6y+1=0$
C. $x^2+y^2-2x+6y=0$ **D.** $x^2+y^2-2x+6y-2=0$

4. Na kojoj je slici prikazan presjek kruga $x^2+y^2-2x+4y-4\leq 0$ i poluravnine $x+2y+4\geq 0$?

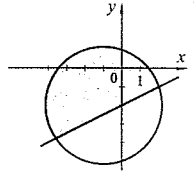
A.



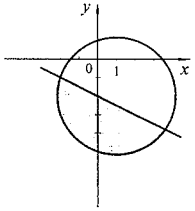
B.



C.



D.



5. Pravac $4x-3y-1=0$ tangenta je kružnice $x^2+y^2-4x+2y+c=0$. Tada je:

A. $c=1$ **B.** $c=2$ **C.** $c=3$ **D.** $c=4$

6. Pravac koji prolazi središtima dvaju kružnica $x^2+y^2-4x+3y+1=0$ i $x^2+y^2+x-2y-3=0$ ima nagib:

A. $k=-1$ **B.** $k=\frac{1}{2}$ **C.** $k=-1$ **D.** $k=-\frac{3}{2}$

7. Kružnica simetrična kružnici $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ s obzirom na pravac $x+y=0$ ima središte u točki:

A. $S'(3,-1)$ **B.** $S'(-3,-1)$ **C.** $S'(-3,1)$ **D.** $S'(3,1)$

8. Kut što ga zatvaraju tangente položene iz ishodišta na kružnicu $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ iznosi:

A. $56°19'$ **B.** $67°23'$ **C.** $58°2'$ **D.** $90°$

Ispit 2

1. Kružnica ima središte u točki $S(3,4)$ i prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Njezina je jednadžba:
   A. $(x+3)^2+(y+4)^2=25$ **B.** $(x-3)^2+(y-4)^2=25$
   C. $(x-3)^2+(y-4)^2=0$ **D.** $(x-3)^2+(y-4)^2=5$
2. Polumjer kružnice koja je koncentrična kružnici $x^2+y^2+4x-11=0$ i koja dira os y jednak je:
   A. $r=3$ **B.** $r=2$ **C.** $r=1$ **D.** $r=4$
3. Veća od dviju kružnica koje prolaze točkom $T(-1,2)$ i koje diraju obje koordinatne osi ima polumjer duljine:
   A. $r=10$ **B.** $r=8$ **C.** $r=5$ **D.** $r=2$
4. Odsječak pravca $y=2x+4$ između koordinatnih osi tetiva je kružnice čije je središte na osi x. Jednadžba te kružnice glasi:
   A. $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ **B.** $(x-3)^2+y^2=5$
   C. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ **D.** $(x-3)^2+y^2=25$
5. Vrhovi trokuta su točke $A(-1,-1)$, $B(3,-1)$ i $C(3,5)$. Jednadžba kružnice opisane tomu trokutu glasi:
   A. $(x-1)^2+(y-2)^2=13$ **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=13$
   C. $(x-2)^2+y^2=13$ **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2=52$
6. Kružnica sa središtem u točki $S(1,-1)$ na pravcu $x-2y+7=0$ odsijeca tetivu duljine 8. Jednadžba te kružnice glasi:
   A. $(x+1)^2+(y-1)^2=36$ **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2=36$
   C. $(x-1)^2+(y+1)^2=16$ **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2=16$
7. Točkom $A(-1,y>0)$ kružnice $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ položena je tangenta na kružnicu. Nagib te tangente jednak je:
   A. $\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{2}{3}$
8. Sjecišta pravaca $x-y-2=0$, $x+2=0$ i $y-1=0$ leže na jednoj kružnici. Njezina je jednadžba:
   A. $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ **B.** $x^2+(y-1)^2=4$
   C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$ **D.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$
9. Površina dijela ravnine koji je određen sustavom nejednadžbi $x^2+y^2\leq 36$ i $|x|+y\leq 0$ jednaka je:
   A. $P=9\pi$ **B.** $P=8\pi$ **C.** $P=12\pi$ **D.** $P=16\pi$
10. Površina lika čiji su vrhovi sjecišta kružnice $x^2+y^2-2x+6y=0$ s koordinatnim osima iznosi:
    A. $P=12$ kv. jed. **B.** $P=8$ kv. jed. **C.** $P=10$ kv. jed. **D.** $P=6$ kv. jed.

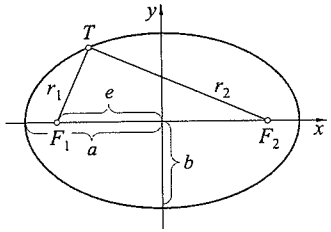
19. lekcija

Elipsa, hiperbola i parabola

19. lekcija Ponovimo

Elipsa

Elipsa je skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi $r_1 + r_2 = 2a$. Točke F_1 i F_2 nazivaju se **žarišta (fokusi)** elipse. Polovica udaljenosti između žarišta je broj e koji nazivamo **linearnim ekscentricitetom** elipse.



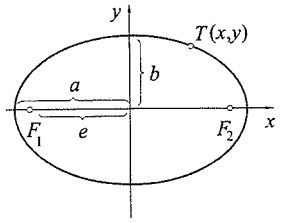
Kanonska jednadžba elipse.

Jednadžba elipse sa središtem u ishodištu i osima koje leže na koordinatnim osima glasi:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

tj. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

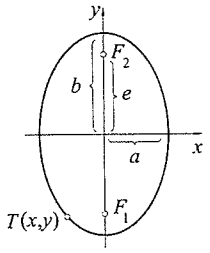
uz $e^2 = a^2 - b^2$



$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

tj. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

uz $e^2 = b^2 - a^2$



Ako je $a > b$, njezina velika os (duljine $2a$) i žarišta leže na osi apscisa, a ako je $a < b$, onda velika os (duljine $2b$) i žarišta leže na osi ordinata. Ako je $a = b$, elipsa postaje kružnica.

Uvjet dodira pravca i elipse.

Pravac $y = kx + l$ dira elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ onda i samo onda kad vrijedi:

$$a^2k^2 + b^2 = l^2.$$

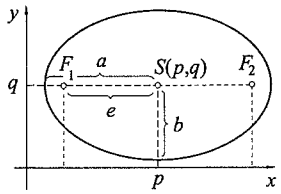
Koordinate dirališta su $D\left(-\dfrac{ka^2}{l}, \dfrac{b^2}{l}\right)$.

Jednadžba tangente u točki (x_1, y_1) elipse.

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

Numerički ekscentricitet elipse $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Jednadžba translatirane elipse.

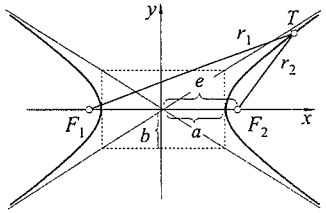


Elipsa kojoj je središte točka $S(p, q)$, a osi paralelne s koordinatnim osima, ima jednadžbu:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

Jednadžba hiperbole

Hiperbola je skup svih točaka T u ravnini za koje vrijedi $|r_1 - r_2| = 2a$. Točke F_1 i F_2 nazivaju se **žarišta (fokusi)** hiperbole. Polovica udaljenosti između žarišta je broj e koji nazivamo **linearnim ekscentricitetom** hiperbole.

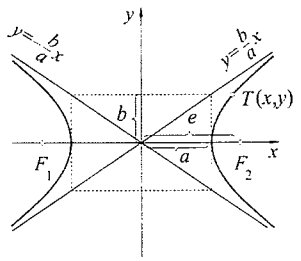


Kanonska jednadžba hiperbole. Jednadžba hiperbole sa središtem u ishodištu i osima koje leže na koordinatnim osima glasi:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

tj. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

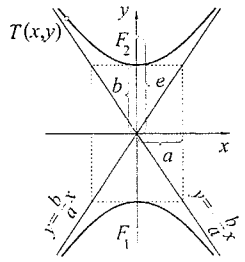
uz $e^2 = a^2 + b^2$



$-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

tj. $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

uz $e^2 = a^2 + b^2$



Asimptote hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ su pravci $y=\frac{b}{a}x$ i $y=-\frac{b}{a}x$.

Uvjet dodira pravca i hiperbole.

Pravac $y=kx+l$ dira hiperbolu $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ onda i samo onda kad vrijedi:

$$a^2k^2-b^2=l^2.$$

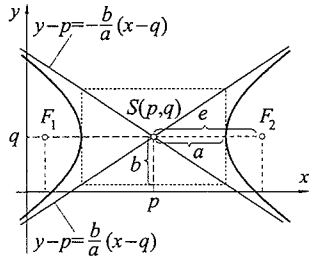
Koordinate dirališta su $D\left(-\frac{ka^2}{l},-\frac{b^2}{l}\right)$.

Jednadžba tangente u točki (x_1,y_1) **hiperbole.**

$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2.$$

Numerički ekscentricitet elipse $\varepsilon=\frac{e}{a}$, $\varepsilon>1$.

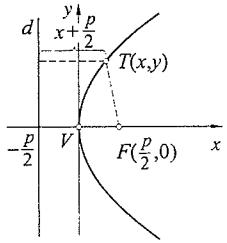
Jednadžba translatirane hiperbole.



Hiperbola kojoj je središte točka $S(p,q)$, a osi paralelne s koordinatnim osima, ima jednadžbu:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$

Parabola



Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d i jedne čvrste točke F u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu. Pravac d nazivamo **ravnalicom (direktrisom)** parabole, a točku F **žarištem (fokusom)** parabole. Udaljenost žarišta do ravnalice označavamo s p i nazivamo **poluparametrom** parabole.

Jednadžba parabole. Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscisa, ima jednadžbu:

$$y^2=2px.$$

Žarište takve parabole je:

$$F\left(\frac{p}{2},0\right).$$

Pripadna ravnalica je:

$$d\ldots x=-\frac{p}{2}$$

Uvjet dodira pravca i parabole. Pravac $y=kx+l$ dira parabolu $y^2=2px$ onda i samo onda kad vrijedi:

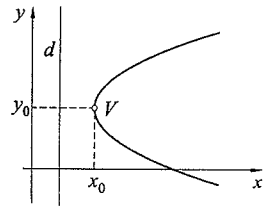
$$p=2kl.$$

Koordinate dirališta su $D\left(\frac{l}{k},2l\right)$.

Jednadžba tangente u točki (x_1,y_1) **parabole.**

$$y_1y=p(x+x_1).$$

Jednadžba translatirane parabole.



Parabola kojoj je tjeme točka $S(x_0,y_0)$, a ravnalica paralelna s osi y, ima jednadžbu:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Pripadno žarište i ravnalica su:

$$F\left(\frac{p}{2}+x_0,y_0\right),\quad d\ldots x=-\frac{p}{2}+x_0.$$

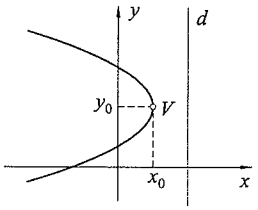
Zrcalna slika translatirane parabole.

Zrcalna slika parabole kojoj je tjeme točka $S(x_0,y_0)$, a ravnalica paralelna s osi y, ima jednadžbu:

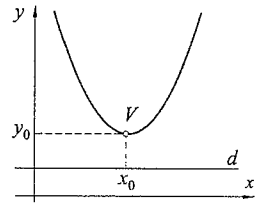
$$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0).$$

Pripadno žarište i ravnalica su:

$$F\left(-\frac{p}{2}+x_0,y_0\right),\quad d\ldots x=\frac{p}{2}+x_0.$$



Parabole oblika $x^2=2py$.



Parabola kojoj je tjeme točka $S(x_0,y_0)$, a ravnalica paralelna s osi x, ima jednadžbu:

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Pripadno žarište i ravnalica su:

$$F\left(x_0,\frac{p}{2}+y_0\right),\quad d\ldots y=-\frac{p}{2}+y_0.$$

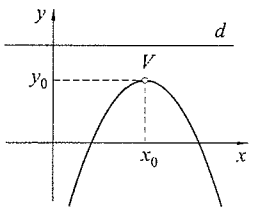
Zrcalna slika parabole $x^2=2py$.

Zrcalna slika parabole kojoj je tjeme točka $S(x_0,y_0)$, a ravnalica paralelna s osi x, ima jednadžbu:

$$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0).$$

Pripadno žarište i ravnalica su:

$$F\left(x_0,-\frac{p}{2}+y_0\right),\quad d\ldots y=\frac{p}{2}+y_0.$$

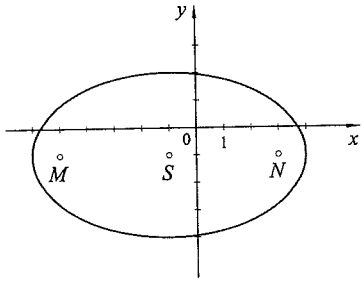


19. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Zbroj udaljenosti svake točke krivulje $\mathcal{K}$ od točaka $M(-5,-1)$ i $N(3,-1)$ jednak je 10. Koja je to krivulja i kako glasi njezina jednadžba?

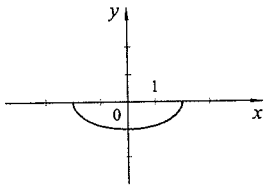
Rješenje. Ova je krivulja elipsa. Točke M i N njezina su žarišta, ona su udaljena $2e = 8$. Velika os elipse je dužina duljine 10, dakle, $2a = 10$. Duljina male osi izračuna se iz jednakosti $b^2 = a^2 - e^2$. Tako se dobije $b = 3$. No, središte ove elipse je točka $S(-1,-1)$. Ova je elipsa nastala translacijom elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. Njezina je jednadžba: $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.



Primjer 2.

Odredimo skup točaka ravnine koji je zadan jednadžbom $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$.

Rješenje.



Najprije uočimo kako jednadžba ima smisla samo ako je $x^2 < 4$, odnosno $-2 \le x \le 2$. Nadalje, graf dane jednadžbe smješten je ispod osi x jer je $y \le 0$ za svaki x iz navedenog intervala.

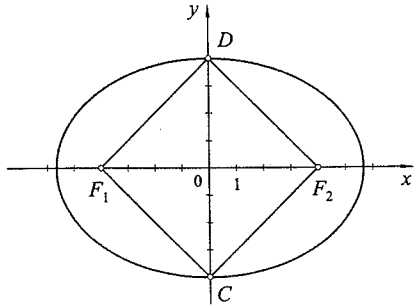
Jednadžbu kvadrirajmo i zapišimo u obliku $x^2 + 4y^2 = 4$.

Ova posljednja jednadžba jest jednadžba elipse s velikom osi $2a = 4$ i malom $2b = 2$. I tako zaključujemo: Dani je skup točaka dio elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, i to onaj dio koji je smješten u III. i IV. kvadrantu.

Primjer 3.

Žarišta elipse $F_1(-4,0)$ i $F_2(4,0)$ te krajnje točke C i D male osi elipse vrhovi su kvadrata. Kako glasi jednadžba ove elipse?

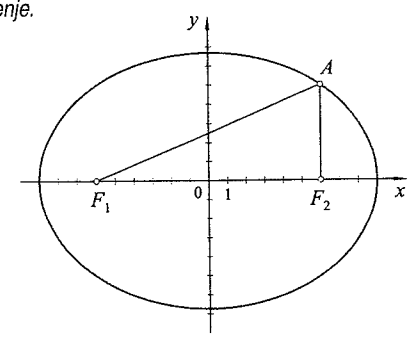
Rješenje. Dužina $\overline{F_1F_2}$ dijagonala je kvadrata. Njezina je duljina $2e = 8$, pa je duljina stranice kvadrata, koja je ujedno i velika poluos elipse, jednaka $a = \frac{2e}{\sqrt{2}}$. Slijedi $a^2 = 32$. Nadalje je $2b = 8$, jer je $\overline{CD}$ druga dijagonala kvadrata. Jednadžba elipse glasi $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$, ili $x^2 + 2y^2 = 32$.



Primjer 4.

Odredimo onu točku elipse $5x^2 + 9y^2 = 405$ za koju je razlika udaljenosti od žarišta jednaka 8.

Rješenje.



Jednadžbu elipse zapišimo u obliku $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$. Dakle, $a = 9$ pa imamo sustav jednadžbi $r_1 - r_2 = 8$ i $r_1 + r_2 = 18$. Rješenja ovog sustava su $r_1 = 13$ i $r_2 = 5$.

Kako je $a^2 - b^2 = e^2$, slijedi $e^2 = 36$, pa su žarišta elipse točke $F_1(-6,0)$ i $F_2(6,0)$. Na elipsi valja odrediti točku koja je od jednog žarišta udaljena 5. Od drugog će onda biti udaljena 13.

Sve točke udaljene za 5 od desnog žarišta elipse pripadaju kružnici sa središtem u tom žarištu i polumjerom 5. Sjecišta te kružnice i elipse tražene su točke.

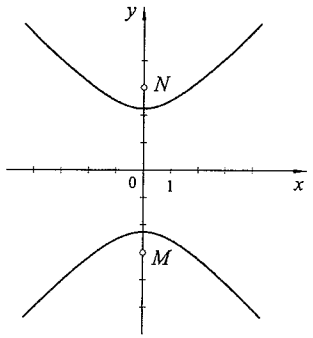
Valja, dakle, riješiti sustav jednadžbi $(x-6)^2 + y^2 = 25$ i $5x^2 + 9y^2 = 405$. Tako dobivamo točke $T_1(6,5)$ i $T_2(6,-5)$. Zbog simetričnosti elipse još dvije točke su rješenja zadatka, $T_3(-6,5)$ i $T_4(-6,-5)$.

Zanimljivo je uočiti kako su sve te točke "iznad", odnosno "ispod" žarišta elipse. Naime, da smo primijetili kako je $r_1^2 - r_2^2 = (2e)^2$, gornji račun ne bismo morali ni provoditi.

Primjer 5.

Odredimo skup točaka ravnine za koje je razlika udaljenosti od dviju točaka $M(0,-3)$ i $N(0,3)$ jednaka 4.

Rješenje. Prema definiciji hiperbole na ovaj je način zadana hiperbola kojoj je $2a=4$ i $2e=6$. Onda je $b^2=e^2-a^2=9-4=5$. No, žarišta hiperbole smještena su na osi y.



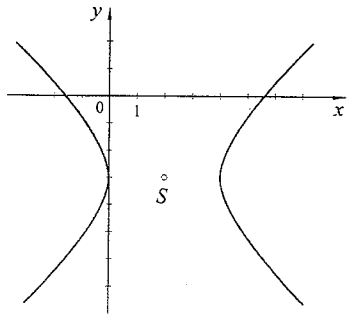
Kako je jednadžba hiperbole kojoj su žarišta točke $F_1(0,-e)$ i $F_2(0,e)$ oblika $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, jednadžba hiperbole kojima su žarišta točke $F_1(0,e)$ i $F_2(0,e)$ jest: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Tako je jednadžba naše hiperbole: $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

Primjer 6.

Odredimo skup točaka ravnine zadanih jednadžbom $x^2-y^2-4x-6y-9=0$.

Rješenje.



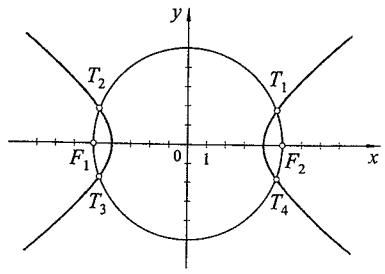
Danu jednadžbu zapišimo u obliku: $(x-2)^2-(y+3)^2=4$. Možemo je zapisati i kao: $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$. Vidimo da je to jednadžba hiperbole kojoj je centar simetrije točka $S(2,-3)$. Za tu je hiperbolu $a=b=2$. Općenito, hiperbolu za koju je $a=b$ zovemo **jednakostraničnom hiperbolom**.

Hiperbola je sukladna hiperboli $x^2-y^2=4$ i nastala je translacijom pri kojoj se centar simetrije (ishodište koordinatnog sustava) preslikao u točku S.

Primjer 7.

Odredimo onu točku hiperbole $9x^2-16y^2=144$ čije su spojnice sa žarištima hiperbole međusobno okomite.

Rješenje. Opišemo li nad dužinom $\overline{F_1F_2}$ kružnicu, ta će kružnica sjeći hiperbolu u četiri točke koje su rješenje zadatka. To slijedi izravno iz *Talesova poučka* o obodnom kutu nad promjerom kružnice.



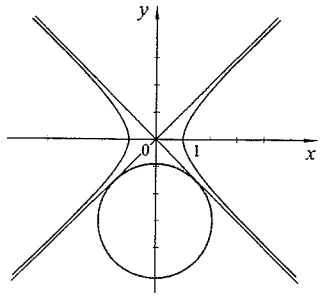
Kako je $a^2=16$, $b^2=9$, onda je $e^2=16+9=25$.

Polumjer kružnice jednak je 5 i njezina je jednadžba $x^2+y^2=25$. Izrazimo $x^2=25-y^2$, uvrstimo u jednadžbu hiperbole te dobijemo kvadratnu jednadžbu $9(25-y^2)-16y^2=144$. Njezina su rješenja $y_1=\frac{9}{5}$ i $y_2=-\frac{9}{5}$. Četiri su točke na hiperboli čije su spojnice sa žarištima hiperbole međusobno okomite. To su točke $T_1\left(\frac{4\sqrt{34}}{5},\frac{9}{5}\right)$, $T_2\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5},\frac{9}{5}\right)$, $T_3\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5},-\frac{9}{5}\right)$, $T_4\left(\frac{4\sqrt{34}}{5},-\frac{9}{5}\right)$.

Primjer 8.

Kako glasi jednadžba kružnice kojoj je središte na osi y, koja dira asimptote hiperbole $x^2-y^2=1$ i koja omeđuje krug površine 4π?

Rješenje.



Hiperbola je jednakostranična, $a=b=1$, njezine su asimptote pravci $y=\pm x$.

Površina kruga jednaka je 4π, odakle slijedi da je polumjer kružnice jednak je 2.

Središte kružnice je točka $S(0,q)$. Kako su ishodište, središte kružnice i dirališta vrhovi kvadrata, slijedi $q=2\sqrt{2}$.

I konačno, jednadžba kružnice glasi: $x^2+(y-2\sqrt{2})^2=4$. Postoji, dakako, još jedna kružnica koja zadovoljava uvjete zadatka i ona je simetrična prvoj prema osi x. Njezina je jednadžba $x^2+(y+2\sqrt{2})^2=4$.

Primjer 9.

Dana je elipsa $9x^2+25y^2=1$. Kako glasi jednadžba jednakostranične hiperbole ($a=b$) čija su žarišta ujedno i žarišta dane elipse?

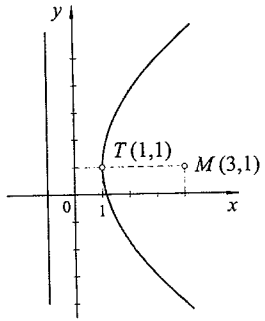
Rješenje. Za elipsu najprije nalazimo $a^2 = \frac{1}{9}$, $b^2 = \frac{1}{25}$ te je $e = \frac{4}{15}$. No, ovo je ujedno i linearni ekscentricitet hiperbole, pa vrijedi $e_h^2 = 2a_h^2 = \frac{16}{225}$. Dakle, $a_h^2 = \frac{8}{225}$.

Jednadžba hiperbole glasi: $x^2 - y^2 = \frac{8}{225}$.

Primjer 10.

Odredimo skup točaka ravnine koje su jednako udaljene od točke $M(3,1)$ i od pravca $x+1=0$.

Rješenje. Ovaj je skup točaka parabola, kojoj je točka M žarište, a pravac $x=-1$ ravnalica. Udaljenost točke M od ravnalice jednaka je 4, što znači da je parametar p parabole jednak 4. Tjeme ove parabole je točka $T(1,1)$.



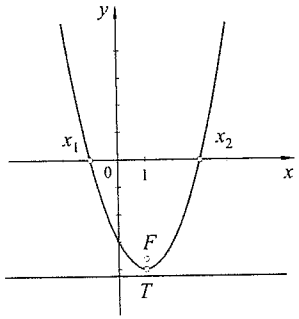
Sukladna parabola kojoj bi os simetrije bila os x, a tjeme u ishodištu imala bi jednadžbu $y^2 = 8x$.

Naša se parabola, dakle, može dobiti translacijom te parabole za 1 udesno i 1 prema gore. Zato je njezina jednadžba $(y-1)^2 = 8(x-1)$.

Primjer 11.

Dana je parabola $y = x^2 - 2x - 3$. Odredimo žarište i ravnalicu te parabole.

Rješenje.



Ako parabolu $y^2 = 2px$ zrcalimo prema pravcu $y = x$, dobit ćemo parabolu s jednadžbom $x^2 = 2py$, odnosno $y = \frac{1}{2p}x^2$. Prepoznajemo u ovom zapisu parabolu $y = ax^2$, pa izvodimo vezu između koeficijenta a i parametra parabole: $a = \frac{1}{2p}$.

Parabola $y = x^2 - 2x - 3$ ima nultočke $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, te je apscisa njezina tjemena $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$. Ordinata tjemena jednaka je $y_0 = -4$.

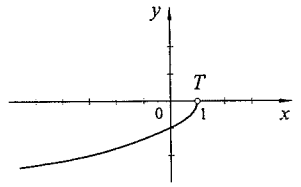
Nadalje, vodeći koeficijent u jednadžbi naše parabole $y = x^2 - 2x - 3 = 0$ jednak je 1, dakle, $a = \frac{1}{2p} = 1$. Zaključujemo da je parametar naše parabole $p = \frac{1}{2}$.

Žarište je točka "iznad" tjemena, od njega udaljena za $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$. Dakle, žarište je točka $F\left(1, -\frac{15}{4}\right)$. Ravnalica je "ispod" tjemena na udaljenosti $\frac{p}{2}$ od njega. Njezina je jednadžba $y = -\frac{17}{4}$.

Primjer 12.

Prikažimo grafički skup točaka ravnine određenih jednadžbom: $y = -\sqrt{1-x}$.

Rješenje. Ako kvadriramo zadanu jednadžbu, dobit ćemo $y^2 = 1-x$. Ovo je jednadžba parabole kojoj je tjeme točka $T(1,0)$, a njezina je os simetrije os x i proteže se ulijevo od pravca $x = 1$.

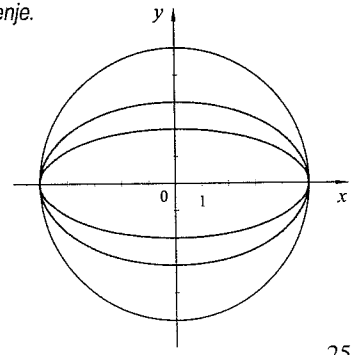


No, skup točaka zadan je jednadžbom $y = -\sqrt{1-x}$ i može se uočiti da je ordinata svake točke ovog skupa negativan broj. Dakle, riječ je o luku parabole $y^2 = 1 - x$ koji je ispod osi apscisa.

Primjer 13.

Ordinata svaka točke kružnice $x^2 + y^2 = 25$ podijeljena je u omjeru $2:3$, a apscise nisu mijenjane. Kako glasi jednadžba tako dobivenog skupa točaka?

Rješenje.



Ordinata svake točke nove krivulje bit će jednaka $\frac{2}{5}$ pojedine ordinate dane kružnice. Tako ćemo dobiti jednadžbu $x^2 + \frac{25}{4}y^2 = 25$, odnosno $4x^2 + 25y^2 = 100$ (slika!).

No, kako zadatkom nije jasno rečeno s kojeg je kraja ordinate (dužine) dijeljenje provođeno, onda zadatak ima još jedno rješenje.

To drugo rješenje je elipsa $x^2 + \frac{25}{9}y^2 = 25$, odnosno $9x^2 + 25y^2 = 225$.

19. lekcija Zadaci

1. Odredite skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka $M(-1,0)$ i $N(5,0)$ jednak 10.

2. Točka $S(-3,5)$ središte je elipse kojoj su osi paralelne koordinatnim osima i koja dira obje koordinatne osi. Kako glasi jednadžba elipse?

3. Ako raspolovimo ordinatu svake točke kružnice $x^2+y^2=16$, a apscise ne mijenjamo, koju ćemo krivulju dobiti? Odredite njezinu jednadžbu.

4. Kolika je površina kvadrata upisanog elipsi $x^2+2y^2=6$?

5. Koliki kut zatvaraju radij-vektori točke $T(3,y)$ elipse $9x^2+25y^2=225$?

6. Promjer osnovice valjka ima duljinu 12 cm. Pod kojim kutom prema osnovici valjka valja postaviti ravninu tako da presjek plašta valjka tom ravninom bude elipsa s velikom osi duljine 16 cm?

7. Sjecišta elipse $x^2+4y^2=25$ s koordinatnim vrhovi su romba. Odredite jednadžbu kružnice upisane tom rombu.

8. Dva su vrha trokuta žarišta elipse $x^2+4y^2=16$, a treći je središte kružnice $x^2+y^2+6y-16=0$. Kolika je površina trokuta?

9. Odredite parametar m tako da pravac $x+2y=m$ bude tangenta elipse $x^2+2y^2=12$.

10. Razlika udaljenosti svake točke krivulje k od točaka $M(-4,0)$ i $N(4,0)$ jednaka je 4. Koja je to krivulja i kako glasi njezina jednadžba?

11. Odredite jednadžbe asimptota hiperbole čija je jednadžba $4x^2-y^2-16x-2y+11=0$.

12. Nacrtajte krivulju čija je jednadžba $y^2=8(x^2-1)$.

13. Žarišta hiperbole $x^2-y^2=8$ ujedno su i žarišta elipse. Ta elipsa prolazi točkom $T(4,6)$. Odredite jednadžbu elipse.

14. Kolika je površina četverokuta kojem su vrhovi sjecišta elipse $x^2+4y^2=20$ i hiperbole $x^2-4y^2=12$?

15. Kolika je površina trokuta što ga zatvaraju asimptote hiperbole $2x^2-y^2=8$ i pravac koji prolazi desnim žarištem hiperbole okomito na os x?

16. Svaka je točka krivulje $\mathcal{K}$ jednako udaljena od točke $F(1,0)$ i pravca $x+1=0$. Koja je to krivulja? Odredite njezinu jednadžbu.

17. Oko žarišta parabole $y^2=12x$ opisana je kružnica koja dira ravnalicu parabole. Kako glasi njezina jednadžba?

18. Kako glasi jednadžba kružnice kojoj je središte žarište parabole $y=-\frac{1}{4}x^2$ i koja dira ravnalicu parabole?

19. Paraboli $y^2=2x$ upisan je jednakostraničan trokut kojemu je jedan vrh tjeme parabole. Kolika je površina toga trokuta?

19. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Zbroj udaljenosti svake točke krivulje K od točaka $F_1(-6,0)$ i $F_2(6,0)$ jednak je 20. Ta je krivulja:

A. elipsa $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$ **B.** elipsa $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

C. elipsa $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ **D.** elipsa $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

2. Žarišta i dva tjemena elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $a>b$ vrhovi su kvadrata čija je površina jednaka 48. Jednadžba elipse glasi:

A. $x^2+2y^2=96$ **B.** $x^2+2y^2=48$ **C.** $x^2+2y^2=24$ **D.** $x^2+2y^2=1$

3. Krivulja čija je jednadžba $x^2+4y^2-2x+8y+4=0$ elipsa je čija je duljina velike osi jednaka:

A. $2a=4$ **B.** $2a=8$ **C.** $2a=2$ **D.** $2a=16$

4. Dva su vrha trokuta žarišta elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, a treći je vrh središte kružnice $x^2+y^2-4x+6y=0$. Površina tog trokuta iznosi:

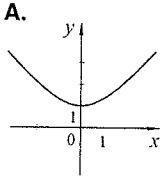
A. $P=8$ **B.** $P=16$ **C.** $P=12$ **D.** $P=18$

5. Kut što ga zatvaraju asimptote hiperbole $x^2-3y^2=9$ iznosi:

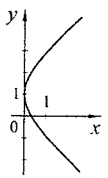
A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

6. Na kojoj je slici prikazan skup točaka kojem je jednadžba $y=\sqrt{1+x^2}$?

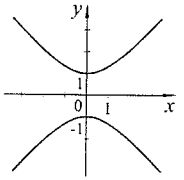
A.



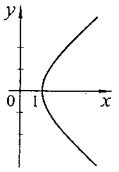
B.



C.



D.



7. Pravac $x+y=m$ i hiperbola $x^2-4y^2=4$ nemaju zajedničkih točaka. Tada je:

A. $|m|>\sqrt{3}$ **B.** $m<-\sqrt{3}$ **C.** $m>\sqrt{3}$ **D.** $|m|<\sqrt{3}$

8. Točka parabole $y^2=4x$ koja je najbliža pravcu $x-2y+6=0$ jest točka:

A. $T(1,2)$ **B.** $T(4,4)$ **C.** $T(1,-2)$ **D.** $T(16,8)$

Ispit 2

1. Površina lika kojem su vrhovi žarišta elipsa $x^2+4y^2=4$ i $4x^2+y^2=4$ jednaka je:
   A. $P=6$ **B.** $P=3$ **C.** $P=12$ **D.** $P=16$

2. Središte elipse čije su osi paralelne koordinatnim osima je točka $S(4,1)$. Elipsa dira obje koordinatne osi. Njezina je jednadžba:
   A. $(x+4)^2+16(y-1)^2=16$ **B.** $(x-4)^2+16(y-1)^2=16$
   C. $(x-4)^2+16(y+1)^2=16$ **D.** $(x+4)^2+16(y+1)^2=16$

3. Ordinata svake točke elipse $x^2+4y^2=16$ povećana je dva puta. Krivulja nastala na taj način je:
   A. elipsa $4x^2+y^2=16$ **B.** kružnica $x^2+y^2=4$
   C. kružnica $x^2+y^2=16$ **D.** elipsa $x^2+4y^2=16$

4. Žarišta elipse tjemena su hiperbole, a žarišta hiperbole tjemena su elipse. Ako je jednadžba elipse $x^2+2y^2=8$, jednadžba hiperbole glasi:
   A. $y^2-x^2=8$ **B.** $x^2-y^2=4$ **C.** $y^2-x^2=4$ **D.** $x^2-y^2=8$

5. Promjer osnovke uspravnog valjka je 6 cm. Valjak je presječen ravninom koja s njegovom osnovkom zatvara kut od $60°$. Presjek je elipsa čija je velika os duga:
   A. 10 cm **B.** 12 cm **C.** 15 cm **D.** 16 cm

6. Tangente elipse $x^2+4y^2=20$ paralelne su pravcu $x-y-6=0$. Udaljenost tih tangenata jednaka je:
   A. $3\sqrt{2}$ **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $6\sqrt{2}$

7. Razlika udaljenosti svake točke krivulje K od točaka $A(-5,0)$ i $B(5,0)$ jednaka je 8. Ta krivulja je hiperbola:
   A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ **B.** $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ **C.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **D.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

8. Površina trokuta što ga zatvaraju asimptote hiperbole $x^2-y^2=9$ i ravnalica parabole $y^2=4x$ iznosi:
   A. 4 kv. jed. **B.** 2 kv. jed. **C.** 1 kv. jed. **D.** 3 kv. jed.

9. Tjeme parabole je točka $T(-2,0)$, a žarište je ishodište koordinatnog sustava. Jednadžba parabole glasi:
   A. $y^2=4(x-2)$ **B.** $y=8(x+2)^2$ **C.** $y=-8(x+2)^2$ **D.** $y^2=8(x+2)$

10. Tangenta na parabolu $y^2=6x$ u njezinoj točki $T(x,6)$ zatvara s koordinatnim osima trokut površine:
    A. 9 kv. jed. **B.** 15 kv. jed. **C.** 18 kv. jed. **D.** 21 kv. jed.

Ispit 3

1. Žarišta i jedno tjeme elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ vrhovi su jednakostraničnog trokuta površine $16\sqrt{3}$. Jednadžba elipse glasi:
   A. $3x^2+4y^2=192$ **B.** $4x^2+9y^2=96$ **C.** $3x^2+4y^2=96$ **D.** $4x^2+9y^2=36$

2. Tjemena elipse vrhovi su romba sa stranicom duljine 10 i površinom 96. Linearni ekscentricitet te elipse iznosi:
   A. $2\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** $2\sqrt{7}$

3. Razlika duljina radij-vektora neke točke na elipsi $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ jednaka je 2. Duljina većeg od njih iznosi:
   A. 6 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 5

4. Pravac $2x-3y+c=0$ i elipsa $4x^2+9y^2=72$ nemaju zajedničkih točaka. Tada je:
   A. $c>-12$ **B.** $|c|<12$ **C.** $c<12$ **D.** $|c|>12$

5. Središte elipse čije su osi paralelne koordinatnim osima je točka $S(-2,3)$. Elipsa dira obje koordinatne osi. Njezina je jednadžba:
   A. $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ **B.** $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{8}=1$
   C. $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$ **D.** $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

6. Hiperbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ prolazi točkama $M(3,1)$ i $N(-5,-3)$. Tada je:
   A. $b=a\sqrt{2}$ **B.** $a=2b$ **C.** $a=b\sqrt{2}$ **D.** $b=2a$

7. Dva vrha pravokutnog trokuta su žarišta hiperbole $x^2-4y^2=4$, a treći vrh, vrh pravog kuta na jednoj asimptoti hiperbole. Površina toga trokuta jednaka je:
   A. $P=2\sqrt{5}$ **B.** $P=5$ **C.** $P=\sqrt{5}$ **D.** $P=10$

8. Površina trokuta što ga zatvaraju asimptote hiperbole $x^2-4y^2=16$ i pravac $y+3=0$ iznosi:
   A. 18 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 16

9. Svaka točka krivulje K jednako je udaljena od pravca $x+2=0$ i točke $F(2,0)$. Ta je krivulja:
   A. parabola $y^2-2x=0$ **B.** parabola $y^2-4x=0$
   C. parabola $y^2-8x=0$ **D.** parabola $y^2-16x=0$

10. Parabola prolazi krajnjim točkama velike osi elipse $9x^2+4y^2=36$. Apscisa njezina vrha jednaka je -3. Jednadžba te parabole glasi:
    A. $y=3(x+3)^2$ **B.** $y^2=3(x+3)$ **C.** $y=3x^2+1$ **D.** $y^2=3x+1$

Ispit 4

1. Zbroj udaljenosti svake točke krivulje K od točaka $M(-1,2)$ i $N(5,2)$ jednaka je 10. Ta krivulja je:
   A. elipsa $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$ **B.** elipsa $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$
   C. elipsa $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ **D.** elipsa $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

2. Zbroj duljina radij-vektora svake točke elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $a>b$ jednak je 16. Njezin je linearni ekscentricitet 6. Jednadžba elipse glasi:
   A. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ **B.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$ **C.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$ **D.** $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$

3. Dva su vrha trokuta žarišta elipse $x^2+4y^2=4$, a treći je vrh središte kružnice $x^2+y^2+x-4y=0$. Površina tog trokuta iznosi:
   A. $P=\sqrt{3}$ **B.** $P=3$ **C.** $P=6$ **D.** $P=2\sqrt{3}$

4. U ravnini koja je prema ravnini projekcije prikolonjena pod 45° nalazi se kružnica polumjera 10 cm. Koliki je linearni ekscentricitet elipse koja je ortogonalna projekcije kružnice?
   A. $e=10$ **B.** $e=5\sqrt{2}$ **C.** $e=\sqrt{10}$ **D.** $e=20$

5. Udaljenost točke T na elipsi od desnog žarišta elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ četiri je puta veća nego udaljenost od lijevog. Apscisa točke T iznosi:
   A. $x=\frac{15}{4}$ **B.** $x=-\frac{9}{2}$ **C.** $x=\frac{25}{4}$ **D.** $x=-\frac{15}{2}$

6. Iz točke $T(5,y>0)$ hiperbole $x^2-y^2=9$ položene su okomice na njezine asimptote. Površina četverokuta što ga zatvaraju te okomice i asimptote iznosi:
   A. $P=9$ **B.** $P=7.5$ **C.** $P=6$ **D.** $P=4.5$

7. Točka $T(1,-2)$ pripada paraboli $y^2=2px$. Udaljenost te točke od ravnalice parabole iznosi:
   A. $d=1$ **B.** $d=4$ **C.** $d=1.5$ **D.** $d=2$

8. Duljina tetive parabole $y^2=12x$ koja prolazi žarištem okomito na os x iznosi:
   A. $t=12$ **B.** $t=6$ **C.** $t=24$ **D.** $t=4$

9. Asimptote hiperbole $4x^2-9y^2=36$ zatvaraju s ravnalicom parabole $y^2=2px$ trokut površine 2 kv. jed. Tada je:
   A. $p=2\sqrt{2}$ **B.** $p=2\sqrt{3}$ **C.** $p=3\sqrt{2}$ **D.** $p=2\sqrt{6}$

10. Parabola $y^2=6x$ i pravac $x-2y+c=0$ imaju točno jednu zajedničku točku. Tada je:
    A. $c=3$ **B.** $c=4$ **C.** $c=5$ **D.** $c=6$

20. lekcija

Geometrija prostora

20. lekcija Ponovimo

Točke, pravci i ravnine

Aksiomi geometrije prostora

A_1) Kroz dvije različite točke prolazi točno jedan pravac.
A_2) Kroz tri točke koje ne leže na jednom pravcu prolazi točno jedna ravnina.
A_3) Pravac koji prolazi kroz dvije različite točke ravnine leži u toj ravnini.
A_4) Ako dvije različite ravnine imaju zajedničku točku, onda se sijeku u pravcu.
A_5) Kroz svaku točku može se povući točno jedna paralela sa zadanim pravcem.

Za točke koje pripadaju jednom pravcu kažemo da su **kolinearne**.

Za točke koje leže u jednoj ravnini kažemo da su **komplanarne**.

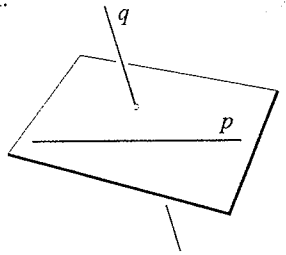
Ravnina može biti zadana:

1) trima točkama koje ne leže na jednom pravcu;
2) pravcem i točkom koja ne leži na njemu;
3) dvama pravcima koji se sijeku;
4) dvama paralelnim pravcima koji se ne podudaraju.

Za dva pravca koja leže u istoj ravnini kažemo da su **paralelna** ako se podudaraju ili se ne sijeku. Oznaka: $p \parallel q$. Dva su pravca u ravnini ili paralelna ili se sijeku u jednoj točki.

Dva pravca u prostoru su paralelna ako leže u istoj ravnini i ne sijeku se. Dva su pravca u prostoru mimoilazna ako ne leže u istoj ravnini.

Ako jedan pravac leži u ravnini, a drugi pravac siječe tu ravninu u jednoj točki koja ne pripada prvom pravcu, onda su oni mimoilazni.



Pravac i ravnina u prostoru su ili paralelni ili se sijeku u jednoj točki. Pritom paralelnost uključuje i slučaj kad pravac leži u ravnini.

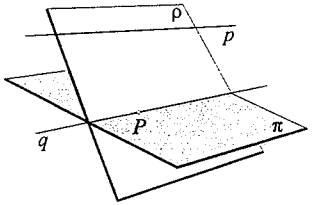
Dvije ravnine mogu biti ili paralelne ili je njihov presjek pravac. Pritom paralelnost uključuje slučaj kad su ravnine istovjetne, a u protivnom se ravnine sijeku po pravcu.

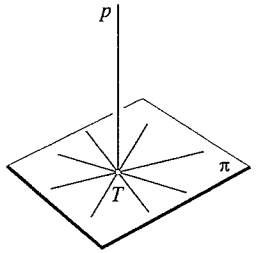
Tri različite ravnine u prostoru mogu biti u jednom od pet položaja:

1) postoji samo jedna točka zajednička za sve tri ravnine;
2) sijeku se duž jednog pravca;
3) po dvije ravnine sijeku se u trima paralelnim pravcima;
4) dvije su ravnine paralelne, a treća ih siječe duž dvaju paralelnih pravaca;
5) sve su tri ravnine paralelne.

Paralelnost i okomitost

Pravac je paralelan s ravninom onda i samo onda ako je paralelan s nekim pravcem koji leži u toj ravnini.





Pravac p okomit je na ravninu π ako je okomit na svaki od pravaca koji leže u ravnini π i koji prolaze točkom T. Pišemo: $p \perp \pi$.

- Ako je pravac okomit na ravninu, onda je svaki pravac paralelan s njim okomit na ravninu.
- Dva pravca okomita na ravninu paralelna su.
- Pravac okomit na ravninu okomit je na svaku ravninu paralelnu s njom.

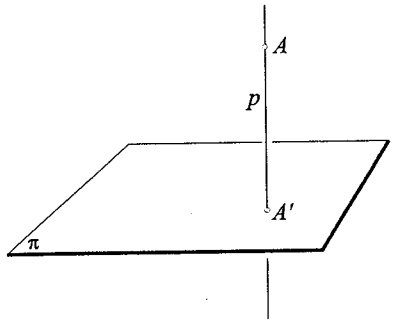
Ravnina π okomita je na ravninu σ ako sadrži pravac koji je okomit na ravninu σ. Pišemo $\pi \perp \sigma$.

Ako je ravnina π okomita na ravninu σ, onda je i ravnina σ okomita na ravninu π. Kraće kažemo da su te dvije ravnine **okomite**.

Ako su dvije ravnine koje se sijeku okomite na treću ravninu, onda je njihov presječni pravac okomit na treću ravninu.

Ortogonalna projekcija i udaljenost

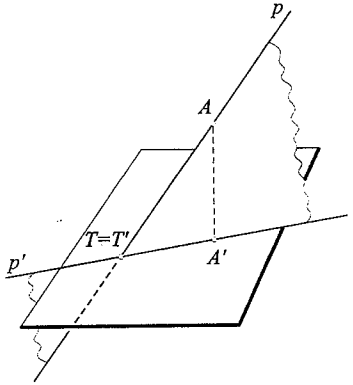
Neka je π po volji odabrana ravnina i A točka u prostoru. Postavimo pravac kroz točku A tako da bude okomit na π. On siječe ravninu π u točki A'. Preslikavanje $A \mapsto A'$ nazivamo **ortogonalnim projiciranjem** (ili ortogonalnom projekcijom) točke A na ravninu π.

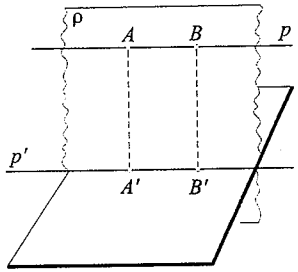


Ortogonalna projekcija točke je točka.

Udaljenost točke od ravnine jednaka je udaljenosti točke od njezine ortogonalne projekcije na ravninu.

Udaljenost dviju paralelnih ravnina jednaka je udaljenosti između po volji odabrane točke A iz prve ravnine i njezine ortogonalne projekcije na drugu ravninu.

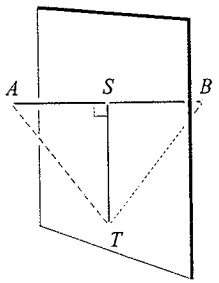




Ortogonalna projekcija pravca je pravac.

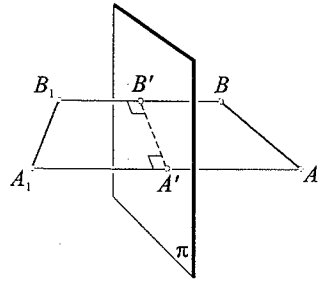
Preslikavanja prostora

Simetralna ravnina dužine $\overline{AB}$ ravnina je koja prolazi polovištem S dužine i okomita je na pravac AB.



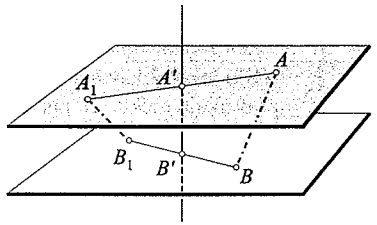
Simetralna ravnina dužine $\overline{AB}$ prolazi polovištem dužine i okomita je na pravac AB. Svaka njezina točka jednako je udaljena od krajeva dužine $\overline{AB}$.

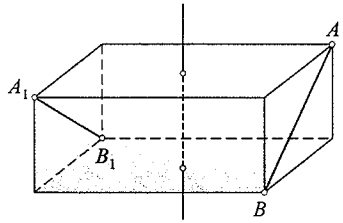
Neka je π zadana ravnina. **Zrcalna simetrija** s obzirom na ravninu π jest preslikavanje $A \mapsto A_1$, gdje je $|A_1A'| = |AA'|$.



Zrcalna je simetrija izometrija. Udaljenost točaka A i B nakon zrcaljenja neće se promijeniti.

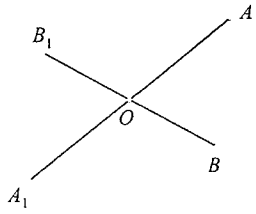
Osna simetrija. Neka je p zadani pravac i A po volji uzeta točka prostora. Točki A pridružimo točku A_1 koja joj je simetrična s obzirom na pravac p, $|A_1A'| = |AA'|$. Za točku A_1 kažemo da je **osnosimetrična** točki A s obzirom na pravac p. Taj se pravac zove **os simetrije**, a preslikavanje $A \mapsto A_1$ nazivamo **osnom simetrijom.**

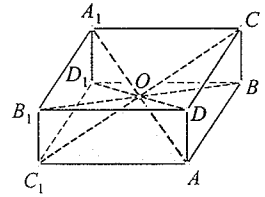




Osna simetrija. Pravac p je os simetrije. I osna je simetrija izometrija: dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$ jednake su duljine (lijevo). Slika kvadra (desno), koji je osnosimetričan, pomaže zoru.

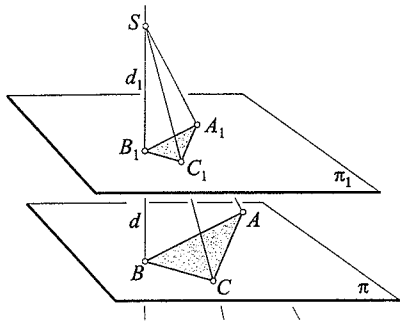
Centralna simetrija je preslikavanje $A \mapsto A_1$ tako da je $|AO| = |OA_1|$. Istaknutu točku O prostora nazivamo **središtem simetrije.**





Centralna simetrija je izometrija.

Homotetija. Neka su zadane dvije paralelne ravnine π i π_1 te točka S koja ne leži na njima. Svakoj točki A ravnine π pridružujemo točku A_1 u ravnini π_1 koja se dobiva kao presjek ravnine π_1 s pravcem SA. Time je definirano preslikavanje s ravnine π u ravninu π_1, $A \mapsto A_1$ koje nazivamo **homotetijom** ili **centralnom sličnošću**. Točka S naziva se **središte homotetije**.



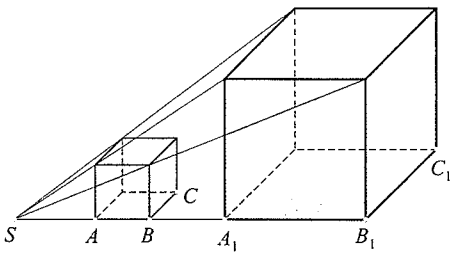
Homotetija.

Vrijedi:

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|SA_1|}{|SA|} = \frac{|SB_1|}{|SB|} = \frac{d_1}{d} = k.$$

Broj k nazivamo **koeficijentom homotetije** (koeficijentom sličnosti).

Homotetija u prostoru.



Neka je S istaknuta točka u prostoru (središte homotetije). **Homotetija** je preslikavanje koje točki A pridružuje točku A_1 takvu da vrijedi:

1. točke S, A i A_1 su kolinearne,

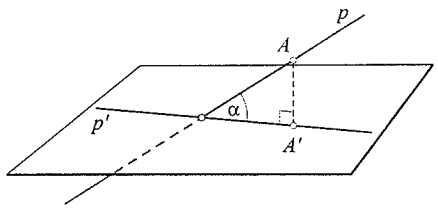
2. $|SA_1| = |k| \cdot |SA|$,

3. za $k > 0$ točke A i A_1 leže u istom polupravcu određenom točkom S, a za $k < 0$ u različitim polupravcima.

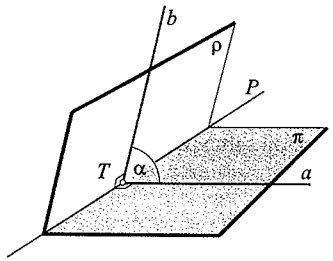
Broj k naziva se **koeficijent homotetije** (ili koeficijent sličnosti).

Kut pravca i ravnine. Kut dviju ravnina

Kut pravca i ravnine je kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu.



Neka su π i ρ dvije ravnine koje se sijeku duž pravca p. Izaberimo bilo koju točku T s presječnice p zadanih ravnina i povucimo pravce a i b tako da pravac a leži u ravnini π i okomit je na p, a b leži u ravnini ρ i okomit je na p. **Kut između ravnina** jest kut koji zatvaraju pravci a i b.



Kut između dviju ravnina. Pravci a i b okomiti su na presječni pravac p tih dviju ravnina.

Površina projekcije. Neka je P površina mnogokuta, P' površina njegove ortogonalne projekcije, a φ kut koji zatvara ravnina lika s ravninom projekcije. Onda vrijedi:

$$P' = P\cos\varphi.$$

Konveksni skupovi, poluprostori i poliedri

Konveksni skupovi

Skup S je konveksan ako sa svake svoje dvije točke sadrži i njihovu spojnicu: iz $A, B \in S$ slijedi $\overline{AB} \subset S$.

Jedan je od najjednostavnijih konveksnih skupova **poluravnina**. To je dio ravnine kojem je granica pravac. Držat ćemo da je i rubni pravac sastavni dio poluravnine.

Konveksan mnogokut je omeđeni skup u ravnini dobiven kao presjek konačno mnogo poluravnina.

Za konveksne skupove u prostoru vrijede slična svojstva koja imaju skupovi u ravnini. Osnovni je konveksan skup u prostoru **poluprostor**. To je skup svih točaka koji leže s iste strane ravnine.

Konveksan poliedar omeđen je skup u prostoru dobiven kao presjek konačno mnogo poluprostora.

Strana poliedra je mnogokut. Ona je dio presječnih ravnina pomoću kojih je poliedar nastao, a koji pripada poliedru.

Brid je dio poliedra u kojem se sastaju dvije strane.

Vrh je krajnja točka brida. To je zajednička točka triju ili više strana.

Brojevi strana, bridova i vrhova nekog poliedra nisu međusobno neovisni. Oni moraju zadovoljavati **Eulerovu formulu**:

$$V + S = B + 2. \qquad (1)$$

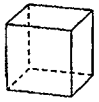
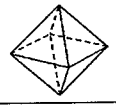
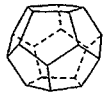
gdje je V broj vrhova, S strana, a B bridova poliedra.

Pravilni poliedri

Poliedar je pravilan ako mu sve strane čine sukladni mnogokuti, a iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova.

Pomoću Eulerove formule pokazuje se da postoji samo pet pravilnih poliedara. To su (pravilni) **tetraedar**, **heksaedar** (kocka), **oktaedar**, **dodekaedar** i **ikosaedar**.

PRAVILNI POLIEDRI

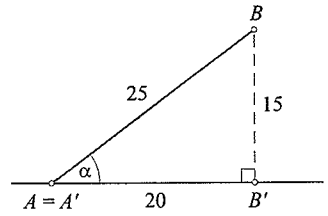
Naziv	Tetraedar	Heksaedar (kocka)	Oktaedar	Dodekaedar	Ikosaedar
Crtež					
Broj strana i njihov oblik	*4 trokuta*	*6 kvadrata*	*8 trokuta*	*12 peterokuta*	*20 trokuta*
Broj bridova	*6*	*12*	*12*	*30*	*30*
Broj vrhova	*4*	*8*	*6*	*20*	*12*
Oplošje	$O=a^2\sqrt{3}$ $(\approx 1{,}7321\cdot a^2)$	$O=6a^2$	$O=2a^2\sqrt{3}$ $(\approx 3{,}4641\cdot a^2)$	$O=3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ $(\approx 20{,}6457\cdot a^2)$	$O=5a^2\sqrt{3}$ $(\approx 8{,}6603\cdot a^2)$
Volumen	$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ $(\approx 0{,}1179\cdot a^3)$	$V=a^3$	$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ $(\approx 0{,}4714\cdot a^3)$	$V=\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$ $(\approx 7{,}6631\cdot a^3)$	$V=\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$ $(\approx 2{,}1817\cdot a^3)$
Polumjer opisane sfere	$R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$R=\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Polumjer upisane sfere	$r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$r=\frac{a}{2}$	$r=\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$r=\frac{a}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$
Kut između pobočki sa zajedničkim bridom	70°33'	90°	109°28'	116°34'	138°11'

20. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Dužina $\overline{AB}$ duljine 25 cm probada ravninu π. Duljina njezine ortogonalne projekcije na istu ravninu iznosi 20 cm. Koliki je kut između pravca AB i ravnine π?

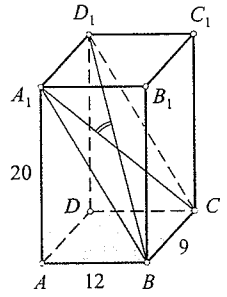
Rješenje. Za rješenje zadatka nebitno je koliko je koja od točaka A i B udaljena od ravnine. Jedino je bitna njihova "visinska razlika" koja iznosi 25 cm. Ne mijenjajući uvjete zadatka možemo uzeti da je točka A u ravnini. Tada je $A = A'$ pa iz trokuta $\triangle AB'B$ imamo: $\cos\alpha = \frac{20}{25} = 0.8$, odakle slijedi: $\alpha = 36°52'$.



Primjer 2.

Koliki kut zatvaraju prostorne dijagonale u najmanjem dijagonalnom presjeku kvadra ako su duljine bridova kvadra jednake 9 cm, 12 cm i 20 cm?

Rješenje.



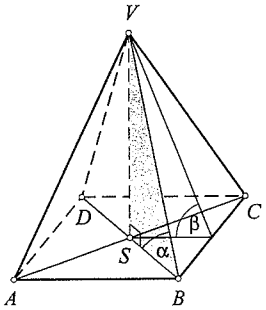
Sve su prostorne dijagonale kvadra jednake duljine $D = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{625} = 25$ cm. Najmanji dijagonalni presjek jest onaj koji je proveden najkraćim bridom. To je pravokutnik čija je jedna stranica dijagonala jedne strane kvadra i iznosi $\sqrt{544}$ cm, a duljina druge stranice je jednaka 9 cm.

Iz $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{25}$ nalazimo $\alpha = 42°12'$.

Primjer 3.

Dana je pravilna četverostrana piramida. Njezin osnovni brid dug je 18 cm, a duljina bočnog brida iznosi 15 cm. Koliki je prikloni kut bočnog brida prema ravnini osnovke piramide? Koliki je prikloni kut bočne strane piramide prema njezinoj osnovci?

Rješenje. Neka je a duljina osnovnog, a b duljina bočnog brida piramide. Označimo s α prikloni kut bočnog brida piramide prema ravnini njezine osnovke. Iz pravokutnog trokuta $\triangle SBV$ je $\cos\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{b}$, pri čemu je d duljina dijagonale osnovke piramide. I sada je $\cos\alpha = \frac{d}{2b} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, odakle slijedi $\alpha = 31°56'53''$.

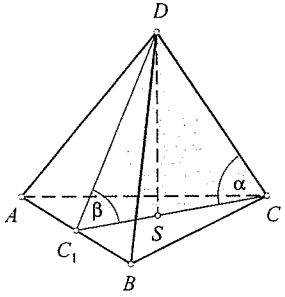


Kut između pobočke piramide i njezine osnovke je kut β između visine pobočke i osnovke: $\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{v_1} = \frac{a}{2v_1} = \frac{3}{4}$. Slijedi: $\beta = 41°24'34''$.

Primjer 4.

Svi bridovi pravilne trostrane piramide jednake su duljine. Koliki je prikloni kut bočnog brida prema ravnini osnovke piramide? Koliki kut zatvaraju ravnine dviju strana piramide?

Rješenje.



Neka je a duljina brida piramide. Promotrimo trokut $\triangle C_1CD$ koji je presjek piramide ravninom koja prolazi visinom $\overline{DS}$ i vrhom C. Ta je ravnina okomita na stranu ABC. Kut $\alpha = \sphericalangle C_1CD$ je prikloni kut bočnog brida prema osnovci ABC, a kut $\beta = \sphericalangle DC_1C$ je kut između dviju strana piramide.

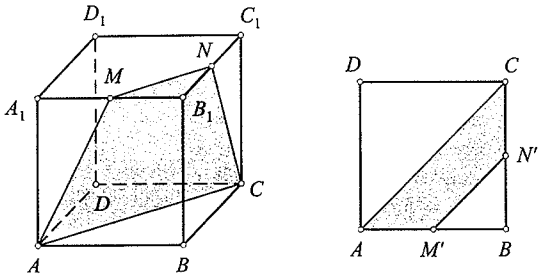
Kako je osnovka jednakostraničan trokut, nožište S visine iz vrha D njegovo je težište. Slijedi: $|C_1S| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, te $|CS| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Iz $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ slijedi $\alpha = 54°44'$, a iz $\cos\beta = \frac{1}{3}$ nalazimo $\beta = 70°32'$.

Primjer 5.

Kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ duljine brida a presječena je ravninom koja prolazi dijagonalom $\overline{AC}$ osnovke i polovištem M brida $\overline{A_1B_1}$ gornje osnovke. Kolika je površina tog presjeka? Kolika je površina ortogonalne projekcije istog presjeka na ravninu ABC?

Rješenje. Kako su strane $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ kocke u paralelnim ravninama, presjek će biti trapez $ACNM$. Duljine njegovih osnovica jednake su $a\sqrt{2}$ i $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trapez je jednakokračan, duljine krakova jednake su $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Iz danih duljina svih stranica trapeza lako je izračunati njegovu površinu $P_t = \frac{9}{8}a^2$.



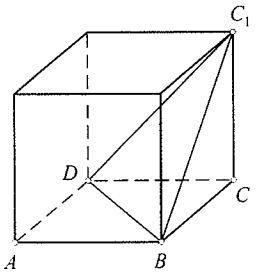
Ortogonalna projekcija ovog presjeka na ravninu osnovke kocke također je trapez čija površina iznosi $P_t' = \frac{3}{8}a^2$.

Iz dobivenih rezultata za površinu presjeka i projekciju tog presjeka na osnovku $ABCD$ kocke možemo izračunati i kut koji ravnina presjeka tvori s osnovkom: $\cos\varphi = \frac{P_t'}{P_t} = \frac{1}{3}$. Odatle se dobije $\varphi = 70°32'$.

Primjer 6.

Dana je kocka $ACDA_1B_1C_1D_1$. Koliki kut zatvaraju ravnine DBC_1 i ABC?

Rješenje.



Kut između ovih dviju ravnina jednak je kutu između dva trokuta, $\triangle DBC_1$ i $\triangle DBC$, od kojih je drugi ortogonalna projekcija prvog. Zbog toga možemo traženi kut φ izračunati iz jednakosti $P' = P \cdot \cos\varphi$.

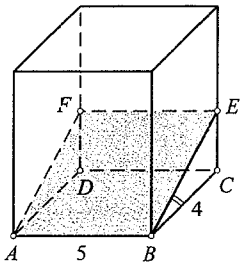
Najprije, $P' = \frac{1}{2}a^2$. Trokut $\triangle DBC_1$ je jednakostraničan sa stranicama koje su dijagonale kvadrata. Zato je $P = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

I sada iz $\cos\varphi = \frac{P'}{P} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nalazimo $\varphi = 54°44'$.

Primjer 7.

Bridovi osnovke kvadra dugi su 4 cm i 5 cm, duljina bočnog brida je 6 cm. Pod kojim kutom prema ravnini osnovke treba postaviti ravninu tako da presjek kvadra tom ravninom bude kvadrat?

Rješenje. Najprije valja zaključiti kako tu ravninu treba položiti duljim osnovnim bridom. U suprotnom, presjek ne može biti kvadrat, nego je pravokutnik kojem je druga stranica dulja od brida kroz koji je položena ravnina.

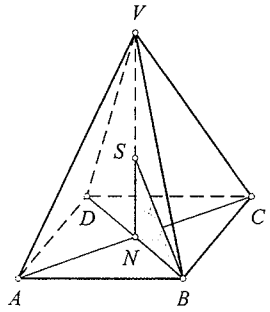


Neka, dakle, ravnina prolazi osnovnim bridom $\overline{AB}$ i neka je četverokut $ABEF$ presjek kvadra tom ravninom. Kako on mora biti kvadrat, onda je $|AB| = |BE| = 5$ cm. Iz pravokutnog trokuta $\triangle ECB$ imamo $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0.8$ i odatle $\alpha = 36°52'11''$. Pod tim kutom prema ravnini osnovice treba bridom $\overline{AB}$ položiti ravnini kako bi bili ispunjeni postavljeni uvjeti.

Primjer 8.

Koliki je polumjer sfere opisane pravilnoj četverostranoj piramidi s osnovnim bridom duljine 8 cm i visinom duljine 10 cm?

Rješenje.



Središte S sfere nalazi se na visini, jednako je udaljeno (za R) od svih vrhova piramide. Primijenimo *Pitagorin poučak* na pravokutni trokut $\triangle SNB$. Tada imamo: $R^2 = (v-R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$,

odakle slijedi: $R = \frac{v^2+32}{2v} = 6.6$ cm.

Primjer 9.

Tri kugle jednakog polumjera R leže na ravnini i međusobno se diraju. Koliki je polumjer kugle koja leži na istoj ravnini i dira sve tri kugle?

Rješenje. Neka su S_1, S_2 i S_3 središta triju jednakih kugli, a S neka je središte četvrte. Polumjer ove posljednje neka je jednak r. Povežimo središta svih četiriju kugli dužinama. Tako dobijemo pravilnu trostranu piramidu čija je osnovka jednakostraničan trokut stranice duljine $2R$, a bočni su bridovi dugi $R+r$. Duljina visine te piramide iznosi $R-r$. Iz jednakosti $(R+r)^2 = \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (R-r)^2$ (vidjeti primjer 4.) slijedi $r = \frac{R}{3}$.

Primjer 10.

Duljina visine piramide jednaka je v. Na kojoj udaljenosti od osnovke valja ravninom paralelnom osnovci presjeći piramidu kako bi površina presjeka bila jednak polovini površine njezine osnovke?

Rješenje. Neka je B površina osnovke piramide i neka je $B_1 = \frac{1}{2}B$ površina presjeka. Neka je d tražena udaljenost i neka je $v - d = x$. Tada vrijedi: $B : B_1 = v^2 : x^2$. Odatle izračunamo: $x = \frac{v}{\sqrt{2}}$ te je $d = v - x = v - \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}v \approx 0.3v$.

Primjer 11.

Ako prizma ima n strana, koliko ima bridova?

Ako piramida ima n strana, koliko ima vrhova?

Rješenje. Ako prizma ima n strana, ona ima dvije osnovke i $n-2$ bočne strane. Tada ona ima $v = 2(n-2)$ vrha. Iz svakog vrha prizme izlaze po tri brida, dva osnovna i jedan bočni. Ukupan broj bridova neke prizme jednak je $b = 3(n-2)$.

Broj strana svake piramide jednak je broju njezinih vrhova. Ako, dakle, piramida ima n strana, ona ima i n vrhova. Prema *Eulerovoj formuli* takva piramida ima $b = 2(n-1)$ bridova.

20. lekcija Zadaci

1. Duljine bridova kvadra iznose 10, 12 i 15 cm.

1) Koliki je kut što ga prostorna dijagonala kvadra zatvara s njegovom najmanjom stranom?

2) Koliki je kut što ga najveći dijagonalni presjek kvadra zatvara s najvećom stranom kvadra?

2. Duljine bridova kvadra jednake su 10, 12 i 15 cm.

1) Koliki je kut što ga prostorna dijagonala kvadra zatvara s njegovom najvećom stranom?

2) Koliki je kut što ga najmanji dijagonalni presjek kvadra zatvara s najmanjom stranom kvadra?

3. Dijagonalom $\overline{AC}$ osnovke kocke i polovištem bočnoga brida $\overline{BB_1}$ položena je ravnina. Ako je a duljina brida kocke,

1) kolika je površina presjeka kocke tom ravninom;

2) koliki je kut između te ravnine i ravnine ABC?

4. Koliki kut zatvaraju dvije susjedne pobočke trostrane piramide čija je osnovka jednakostraničan trokut sa stranicom duljine 12 cm, a duljina bočnog brida piramide jednaka je 10 cm?

5. Koliki kut zatvaraju dvije suprotne pobočke pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezina osnovnog brida 12 cm, a bočnog 10 cm?

6. Koliki kut zatvaraju ravnine, u kojima leže dvije pobočke pravilne četverostrane piramide, ako je bočni brid dvostruko dulji od osnovnog?

7. Površina pobočja pravilne trostrane piramide tri puta je veća od površine osnovke. Koliki je kut između bočnog brida i osnovke piramide?

8. Kut pri vrhu pobočke pravilne četverostrane piramide jednak je $30°$. Koliki je prikloni kut bočne strane prema ravnini osnovke ove piramide?

9. U ravnini π dan je kvadrat sa stranicom duljine 10 cm. Sve četiri spojnice točke V s vrhovima kvadrata priklonjene su prema ravnini π pod kutom od $45°$. Koliko je točka V udaljena od ravnine π?

10. Probodište P dužine $\overline{AB}$ s ravninom π dijeli dužinu u omjeru $2 : 3$. Ako je duljina dužine $\overline{AB}$ jednaka 29 cm, a duljina njezine ortogonalne projekcije na ravninu π 20 cm, koliko su od te ravnine udaljene točke A i B?

11. Probodište P dužine $\overline{AB}$ s ravninom π dijeli dužinu u omjeru $1 : 3$. Ako je duljina dužine $\overline{AB}$ jednaka 20 cm, a duljina njezine ortogonalne projekcije na ravninu π 16 cm, koliko su od te ravnine udaljene točke A i B?

12. Bočni brid piramide podijeljen je na četiri sukladna dijela te su dijelišnim točkama položene ravnine paralelno osnovci. Ako je površina osnovke 400 cm^2, kolike su površine presjeka piramide trima ravninama?

13. Težišta strana jednakobridne trostrane piramide vrhovi su nove piramide. Kolika je duljina njezina brida ako je duljina brida velike piramide jednaka 18 cm?

20. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Dana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i duljina njezina brida jednaka je a. Površina presjeka kocke ravninom koja je određena pravcima AC_1 i BD_1 iznosi:

A. $a^2\sqrt{2}$ **B.** $2a^2$ **C.** $a^2\sqrt{5}$ **D.** a^2

2. Dijagonalom $\overline{BD}$ osnovke kocke i polovištem bočnoga brida $\overline{CC_1}$ položena je ravnina. Kut što ga ta ravnina zatvara s ravninom ABC jednak je:

A. $26°34'$ **B.** $63°26'$ **C.** $45°$ **D.** $35°16'$

3. Površina osnovke pravilne četverostrane piramide tri je puta manja od površine pobočja. Ako je φ prikloni kut pobočke prema ravnini osnovke, onda je:

A. $\cos\varphi = \frac{2}{3}$ **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$ **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$

4. Duljine bridova kvadra jednake su 5 cm, 6 cm i 8 cm. Kut pod kojim se sijeku prostorne dijagonale u najvećem dijagonalnom presjeku kvadra iznosi:

A. $60°$ **B.** $75°42'15''$ **C.** $80°33'48''$ **D.** $88°37'29''$

5. Probodište P dužine $\overline{AB}$ s ravninom σ dijeli dužinu u omjeru $1 : 4$. Ako je točka A bliža ravnini i od nje udaljena 4.8 cm, udaljenost točke B od ravnine iznosi:

A. 16.6 cm **B.** 17.8 cm **C.** 19.2 cm **D.** 21.5 cm

6. Točka V od svakog je vrha jednakostraničnog trokuta udaljena 10 cm. Ako je duljina stranice trokuta jednaka 6 cm, točka V od ravnine trokuta udaljena je:

A. $\sqrt{66}$ cm **B.** $\sqrt{77}$ cm **C.** $\sqrt{88}$ cm **D.** $\sqrt{99}$ cm

7. Broj prostornih dijagonala pravilne n-terostrane prizme jednak je:

A. $n(n-3)$ **B.** $n(n-4)$ **C.** $n(n-1)$ **D.** $n(n-2)$

8. Broj bridova piramide koja ima 13 strana jednak je:

A. 18 **B.** 24 **C.** 20 **D.** 26

9. Svaka kocka ima n ravnina simetrije. Tada je:

A. $n = 3$ **B.** $n = 6$ **C.** $n = 8$ **D.** $n = 9$

10. Visina piramide podijeljena je na tri sukladna dijela pa su dijelištima položene ravnine paralelne osnovci piramide. Površine presjeka piramide tim dvjema ravninama u omjeru su:

A. $1 : 9$ **B.** $4 : 9$ **C.** $1 : 4$ **D.** $1 : 3$

Ispit 2

1. Točka M polovište je brida $\overline{AB}$, a točka N polovište je brida $\overline{DD_1}$ kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ako je duljina brida kocke 2 cm, duljina dužine $\overline{MN}$ jednaka je:
   A. $\sqrt{6}\,\text{cm}$ **B.** $2\sqrt{2}\,\text{cm}$ **C.** $3\,\text{cm}$ **D.** $2\sqrt{3}\,\text{cm}$

2. Dan je kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ako su duljine njegovih bridova $|AB| = 6$ cm, $|AD| = 8$ cm, $|AA_1| = 10$ cm, kut što ga zatvaraju pravci AB i BD_1 iznosi:
   A. $54°46'$ **B.** $64°54'$ **C.** $46°45'$ **D.** $45°46'$

3. Svi bridovi trostrane piramide imaju duljinu a. Udaljenost njezinih dvaju mimosmjernih bridova jednaka je:
   A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

4. Broj svih dijagonala, plošnih i prostornih, pravilne šesterostrane prizme jednak je:
   A. 30 **B.** 36 **C.** 42 **D.** 48

5. Ako prizma ima n bridova, broj njezinih strana jednak je:
   A. $s = n + 2$ **B.** $s = \frac{n+3}{2}$ **C.** $s = 2n$ **D.** $s = \frac{n}{3} + 2$

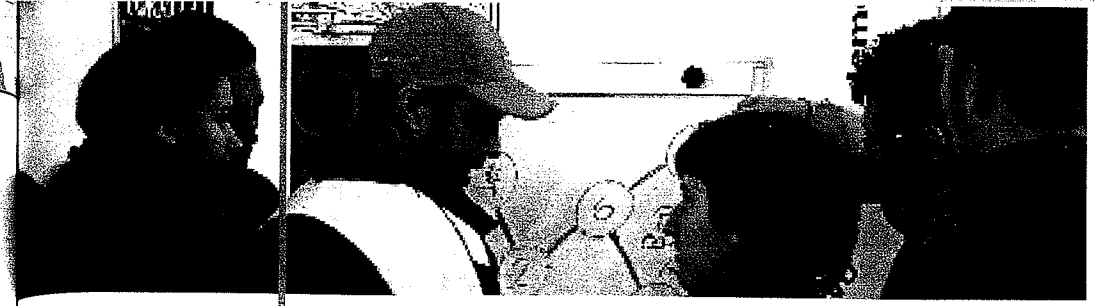
6. Želimo li obojiti oktaedar tako da svake dvije njegove strane, one koje imaju zajednički brid, budu obojene različitim bojama, tada nam je potrebno najmanje k boja:
   A. $k = 4$ **B.** $k = 3$ **C.** $k = 2$ **D.** $k = 1$

7. Kocka je obojena i potom razrezana ravninama paralelnim njezinim trima stranama na 1 000 manjih kockica. Broj kockica koje su pritom obojene s točno dvije strane jednak je:
   A. 192 **B.** 96 **C.** 128 **D.** 64

8. Jednakostraničan trokut $\triangle AEB$ i kvadrat $ABCD$ leže u okomitim ravninama. Kut između ravnine trokuta i ravnine CDE iznosi:
   A. $49°6'24''$ **B.** $45°$ **C.** $90°$ **D.** $63°14'37''$

9. Ravnina prolazi osnovnim bridom kocke i siječe je tako da je površina presjeka jednaka $\frac{1}{5}$ oplošja kocke. Prikloni kut te ravnine prema osnovci kocke jednak je:
   A. $44°44'26''$ **B.** $33°33'26''$ **C.** $55°55'26''$ **D.** $34°56'26''$

10. Polumjer sfere koja dira sve bridove kocke s duljinom brida a jednak je:
    A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** a **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



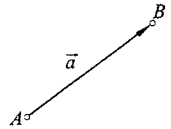
21. lekcija

Vektori

21. lekcija Ponovimo

Definicija vektora

Vektor je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ u kojoj razlikujemo **početnu točku (hvatište)** A i **završnu točku (kraj)** B.

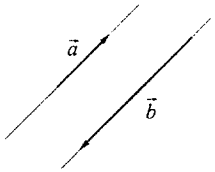


Duljina vektora. Duljina vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ udaljenost je između njegove početne i završne točke. To je, dakle, duljina dužine $\overline{AB}$. Duljinu vektora označavamo s $|\vec{a}|$, ($|\overrightarrow{AB}|$):

$$|\vec{a}| = d(A, B) = |AB|.$$

Smjer vektora. Ako pravac p prolazi točkama A i B vektora $\overrightarrow{AB}$, onda kažemo da taj pravac *sadrži* vektor $\overrightarrow{AB}$, ili da vektor $\overrightarrow{AB}$ leži na pravcu p.

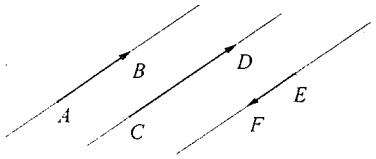
Govorimo još da je pravac p **nositelj** vektora $\overrightarrow{AB}$.



Ako dva vektora leže na paralelnim pravcima, za njih kažemo da imaju **isti smjer** ili da su **kolinearni**. U suprotnom slučaju govorimo o nekolinearnim vektorima.

Orijentacija vektora

Dva vektora koji imaju isti smjer (koji su kolinearni) mogu imati istu ili suprotnu orijentaciju. Tako vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju istu, a vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{EF}$ suprotnu orijentaciju.

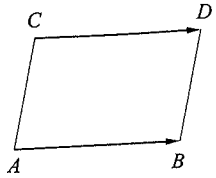


Za vektore jednake duljine, istoga smjera i suprotne orijentacije kažemo da su **suprotni vektori**.

Nul-vektor. Vektor kojem se podudaraju početna i završna točka nazivamo **nul-vektorom** i označavamo s $\vec{0}$. Općenito je $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ za svaku toču A.

Duljina nul-vektora jednaka je nuli, ne definiraju mu se smjer i orijentacija, a uzima se da je kolinearan sa svakim vektorom.

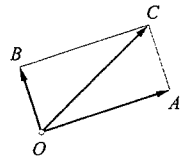
Jednakost vektora. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki su onda i samo onda ako je četverokut $ABDC$ paralelogram. Jednaki vektori imaju jednaku duljinu, isti smjer i istu orijentaciju.



Operacije s vektorima

Zbroj dvaju vektora

Pravilo paralelograma

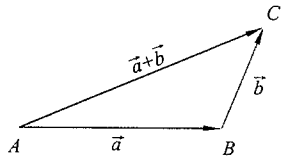


Zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O je vektor $\overrightarrow{OC}$ takav da je $\overline{OC}$ dijagonala paralelograma $OACB$. Pišemo:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Pravilo trokuta

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **ulančani** su ako se završetak prvog podudara s početkom drugog. Zbroj dvaju ulančanih vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$ koji spaja početnu točku prvog vektora sa završnom točkom drugog vektora.



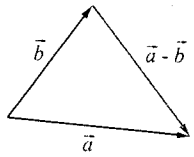
Zbrajanje vektora je **komutativno**, tj. za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Zbrajanje vektora je **asocijativno**, tj. za bilo koja tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Oduzimanje vektora

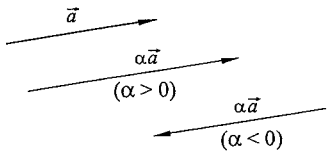


Razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je zbroj vektora $\vec{a}$ i vektora $-\vec{b}$, suprotnog vektora vektoru $\vec{b}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Množenje vektora skalarom

Vektor $\vec{a}$ množi se skalarom α tako da se dobije vektor $\alpha\vec{a}$ sa svojstvima:



1. duljina mu je jednaka umnošku apsolutne vrijednosti skalara i duljine vektora:

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|;$$

2. smjer mu je jednak smjeru vektora $\vec{a}$;

3. orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha < 0$.

Kriterij kolinearnosti. Vektori $\vec{a_1}$ i $\vec{a_2}$ ($\vec{a_2} \neq \vec{0}$) kolinearni su onda i samo onda kad postoji skalar k takav da vrijedi:

$$\vec{a_1} = k\vec{a_2}.$$

Skalarni umnožak

Skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je realni broj $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definiran s:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Za sve vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i svaki skalar $\lambda \in \mathbf{R}$ vrijedi:

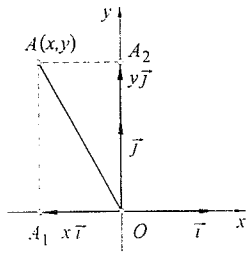
1. pozitivnost: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geqslant 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$;

2. komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

3. homogenost: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

4. distributivnost: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Vektori u Kartezijevu koordinatnom sustavu



Dva su istaknuta vektora u Kartezijevu koordinatnom sustavu: jedinični vektor na osi apscisa $\vec{i}$, $\vec{j}$ jedinični vektor na osi ordinata. Par vektora $(\vec{i}, \vec{j})$ čine **bazu Kartezijeva pravokutnog sustava.**

Radij-vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ točke $A(x, y)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ ovako:

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Realne brojeve x i y nazivamo **koordinatama vektora** $\overrightarrow{OA}$.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki $A(x_1, y_1)$ i završetkom u točki $B(x_2, y_2)$ ima prikaz:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Kriterij za jednakost vektora. Dva su vektora, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ jednaka onda i samo onda ako im se podudaraju njihove pravokutne koordinate:

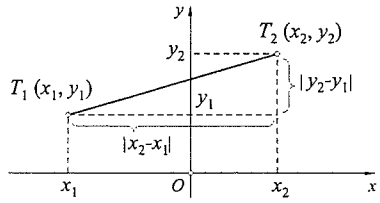
$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_x = b_x, \quad a_y = b_y.$$

Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ u Kartezijevu sustavu računa se formulom:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Duljina vektora. $\overrightarrow{AB}$ jednaka je udaljenosti točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

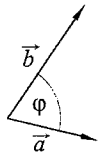
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Općenitije, duljina vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ je:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Kut između vektora



Ako su zadani vektori $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$, onda se primjenom skalarnog umnoška može odrediti kut φ između tih dvaju vektora:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Posebno, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti su onda i samo onda ako vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 0$.

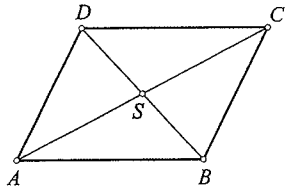
21. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Dijagonale paralelograma $ABCD$ sijeku se u točki S. Provjerimo:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$; **2)** $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$;

3) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$.



Rješenje. Slijedimo sljedeće zapise:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DS}$;

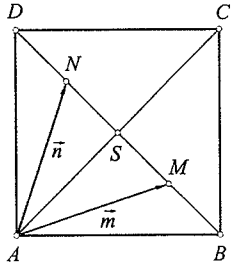
2) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC}$;

3) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{DS} = (\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{CS})+(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{DS}) = \vec{0}$.

Primjer 2.

Dan je kvadrat $ABCD$, točka S sjecište je njegovih dijagonala, a točke M i N polovišta su dužina $\overline{BS}$, odnosno $\overline{DS}$. Izrazimo vektore $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ kao linearne kombinacije vektora $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$ i $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$.

Rješenje.



Dijagonale četverokuta $AMCN$ se raspolavljaju, taj je četverokut dakle romb. Zbog toga je

$$\overrightarrow{AC} = \vec{m} + \vec{n}; \qquad \overrightarrow{BD} = -2\vec{m} + 2\vec{n};$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{m} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$$

$$= \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m} = \frac{3}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n};$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{m} + \vec{n} - \frac{3}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}.$$

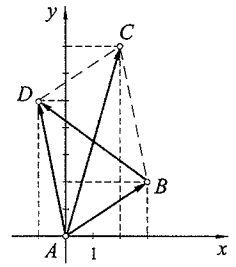
Primjer 3.

Vektorima $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ i $\overrightarrow{AD} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ određen je paralelogram $ABCD$.

1) Kolike su duljine dijagonala paralelograma $ABCD$?

2) Odredimo kut između dijagonala paralelograma $ABCD$.

Rješenje. Najprije je $\overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{BD} = -4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Duljine dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ jednake su duljinama vektora $\overrightarrow{AC}$, odnosno $\overrightarrow{BD}$ te je $|AC| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{53}$; $|BD| = |\overrightarrow{BD}| = 5$.



Koristeći se skalarnim umnoškom vektora imamo $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos\varphi$, gdje je φ kut između vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$, odnosno kut između dijagonala paralelograma. Odatle imamo: $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \dfrac{13}{5 \cdot \sqrt{53}} \approx 0.357$, a odatle je: $\varphi = 69°4'32''$.

Primjer 4.

Dani su vektori $\vec{a} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ i $\vec{c} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$. Odredimo vektor $\vec{v}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}$ i duljine jednake duljini vektora $\vec{b} + \vec{c}$.

Rješenje. Najprije imamo $\vec{b} + \vec{c} = \vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$ te je $|\vec{b} + \vec{c}| = 5\sqrt{2}$.

No, vektor $\vec{v}$ mora biti kolinearan s vektorom $\vec{a}$, a to znači da je $\vec{v} = k \cdot \vec{a}$, pri čemu je k realan broj različit od nule.

I nadalje, zahtijeva se $|\vec{v}| = \sqrt{2k^2} = |k| \cdot \sqrt{2} = |\vec{b} + \vec{\jmath}| = 5\sqrt{2}$. Odatle slijedi $|k| = 5$, pa je konačno $\vec{v} = \pm 5(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})$.

Primjer 5.

Ako su A, B i C vrhovi trokuta te $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ i $\overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + k\vec{\jmath}$, odredimo realni broj $k \neq 0$ tako da trokut $\triangle ABC$ bude pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.

Rješenje. Odredimo $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{\imath} + (k+3)\vec{\jmath}$. Kako trokut $\triangle ABC$ mora biti pravokutan s pravim kutom pri vrhu C, onda mora biti ispunjen uvjet okomitosti vektora $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, odnosno $(2\vec{\imath} + k\vec{\jmath})(\vec{\imath} + (k+3)\vec{\jmath}) = 0$. Iz ovog uvjeta proistječe jednakost $2 + k(k+3) = 0$. Tako dolazimo do kvadratne jednadžbe $k^2 + 3k + 2 = 0$ s rješenjima $k = -2$ i $k = -1$.

Zadatak ima dva rješenja:

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{2}i - 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ te

(2) $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{2}i - \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

21. lekcija Zadaci

1. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta, točka S njegovo je središte. Odredite vektore:

1) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$; **2)** $\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{AB}$;

3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ES}$; **4)** $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CS}$.

2. Dan je pravilni šesterokut $ABCDEF$. Izrazite vektore $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{BE}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

3. Vektor $\overrightarrow{AB}$ prikažite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ ako je $A(3,2)$, $B(7,4)$, $C(5,0)$ i $D(2,-2)$.

4. Ako su točke $A(-3,1)$ i $B(4,-1)$ dva vrha paralelograma $ABCD$, točka $S(1,2)$ sjecište njegovih dijagonala, odredite koordinate vrhova C i D.

5. Vektorima $\overrightarrow{AB} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ i $\overrightarrow{AD} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ određen je paralelogram $ABCD$.

1) Kolike su duljine dijagonala paralelograma $ABCD$?

2) Odredite kut između dijagonala paralelograma $ABCD$.

6. Točke D, E i F polovišta su stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$, izrazite vektore $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{CF}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

7. Odredite m tako da vektori $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ i $\vec{b} = -m\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ budu kolinearni.

8. Dani su vektori $\vec{a} = -2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$, $\vec{b} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{c} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$. Odredi vektor $\vec{v}$ kolinearan s $\vec{c}$, a duljine jednake duljini vektora $\vec{a} + \vec{b}$.

9. Primjenom skalarnog umnoška odredite najveći kut trokuta $\triangle ABC$ ako su vrhovi trokuta točke $A(-2,1)$, $B(3,-1)$, $C(4,2)$.

10. Točke $A(-2,1)$, $B(3,0)$, $C(2,5)$ i $D(-3,6)$ vrhovi su četverokuta $ABCD$. Dokažite da je taj četverokut romb.

11. Dani su vektori $\vec{a} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$. Odredite vektor $\vec{c}$ za kojega je $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ te $\vec{b} \cdot \vec{c} = -5$.

12. Odredite duljinu vektora $\vec{a} + \vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$.

13. Dan je vektor $\vec{b} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Odredite vektor $\vec{a}$ istog smjera i iste orijentacije kao i vektor $\vec{b}$ i duljine $3\sqrt{5}$.

14. Koliki kut zatvaraju vektori $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$ ako je $\vec{a} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, $\vec{b} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$?

15. Odredite vektor $\vec{b}$ kolinearan s vektorom $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ i koji zadovoljava uvjet $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$.

16. Odredite jedinični vektor okomit na vektor $\overrightarrow{AB}$, $A(-1,2)$, $B(3,-1)$.

17. Točka M polovište je stranice $\overline{BC}$, a točka N stranice $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$. Ako je $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 1$, kolika je površina kvadrata?

18. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta. Ako je $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 12$, kolika je površina šesterokuta?

19. Ako je $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC} = 8\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, dokažite da je trokut $\triangle ABC$ pravokutan.

21. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta, a točka S njegovo je središte. Tada je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$ jednako:

A. $\overrightarrow{AF}$ **B.** $\overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{DE}$

2. Točke A, B, C i D vrhovi su paralelograma. Tada je:

A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ **B.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD}$ **D.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$

3. Vektorima $\overrightarrow{AB} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ i $\overrightarrow{AD} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ određen je paralelogram $ABCD$. Duljina dijagonale $\overrightarrow{BD}$ paralelograma jednaka je:

A. $|\overrightarrow{BD}| = 4$ **B.** $|\overrightarrow{BD}| = 4\sqrt{2}$ **C.** $|\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{2}$ **D.** $|\overrightarrow{BD}| = 6$

4. Točke M i N polovišta su stranica $\overline{BC}$, odnosno $\overline{AC}$ trokuta $\triangle ABC$. Ako je $\overrightarrow{BN} = \vec{p}$, $\overrightarrow{CM} = \vec{q}$, tada je:

A. $\overrightarrow{AB} = -2\vec{p} - 2\vec{q}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \vec{p} - 2\vec{q}$ **C.** $\overrightarrow{AB} = -2\vec{p} + \vec{q}$ **D.** $\overrightarrow{AB} = 2\vec{p} + 2\vec{q}$

5. Vektori $\vec{a} = k \cdot \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ i $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ su kolinearni vektori suprotne orijentacije ako je:

A. $k = -2$ **B.** $k = -\frac{1}{2}$ **C.** $k = -1$ **D.** $k = -\frac{1}{4}$

6. Vektori $\overrightarrow{AB} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ i $\overrightarrow{CD} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ zatvaraju kut:

A. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ **B.** $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ **C.** $\varphi = \frac{4\pi}{5}$ **D.** $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

7. Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi $|\vec{a}| = 6$ i $|\vec{b}| = 8$ te $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$. Tada je:

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = 14$ **B.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{7}$ **C.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 11$ **D.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 7\sqrt{5}$

8. Dane su točke $A(-2,1)$, $B(4,4)$, $C(4,0)$, $D(x,7)$. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su okomiti ako je:

A. $x = \frac{3}{2}$ **B.** $x = -\frac{2}{3}$ **C.** $x = -\frac{1}{4}$ **D.** $x = \frac{1}{2}$

9. Vektori $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ i $\vec{w} = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$ okomiti su ako i samo ako je:

A. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = -1$ **B.** $ac = bd$ **C.** $\frac{ab}{cd} = -1$ **D.** $ad - bc = 0$

10. Jedan od jediničnih vektora čiji je smjer određen pravcem $x - 3y = 7$ jest vektor:

A. $\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$ **B.** $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{\jmath}$ **C.** $\vec{e} = \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\jmath}$ **D.** $\vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}$

Ispit 2

1. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta, a točka S njegovo je središte. Tada je $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{SB}$ jednako

   A. $\overrightarrow{EF}$ **B.** $\overrightarrow{SD}$ **C.** $\overrightarrow{BS}$ **D.** $\overrightarrow{AB}$

2. Točke D, E i F polovišta su stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Ako je $\overrightarrow{AD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{q}$, tada je:

   A. $\overrightarrow{CF} = \vec{p} - \vec{q}$ **B.** $\overrightarrow{CF} = \vec{p} + \vec{q}$ **C.** $\overrightarrow{CF} = -\vec{p} + \vec{q}$ **D.** $\overrightarrow{CF} = -\vec{p} - \vec{q}$

3. Dane su točke $A(0,0)$, $B(-3,1)$, $C(2,2)$ i $D(-1,5)$. Ako je $\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, onda je:

   A. $\alpha + \beta = -\frac{13}{2}$ **B.** $\alpha + \beta = \frac{13}{4}$ **C.** $\alpha + \beta = -\frac{7}{4}$ **D.** $\alpha + \beta = \frac{11}{8}$

4. Vektori $\vec{a} = \vec{\imath} + k \cdot \vec{\jmath}$ i $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ su kolinearni vektori iste orijentacije ako je:

   A. $k = 2$ **B.** $k = -\frac{3}{2}$ **C.** $k = \frac{1}{2}$ **D.** $k = \frac{3}{2}$

5. Ako za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$ te $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ jednako:

   A. 10 **B.** -15 **C.** 20 **D.** -25

6. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ trokuta $\triangle ABC$, $A(-4,1)$, $B(-1,-2)$, $C(0,5)$ kolinearna je s vektorom:

   A. $\vec{\imath}$ **B.** $7\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ **C.** $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ **D.** $-\vec{\imath} - 7\vec{\jmath}$

7. Vektorima $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ određen je paralelogram $ABCD$. Kut φ između dijagonala paralelograma $ABCD$ jednak je:

   A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

8. Dane su točke $A(-1,-3)$, $B(2,-1)$, $C(0,4)$, $D(1,y)$. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su okomiti ako je:

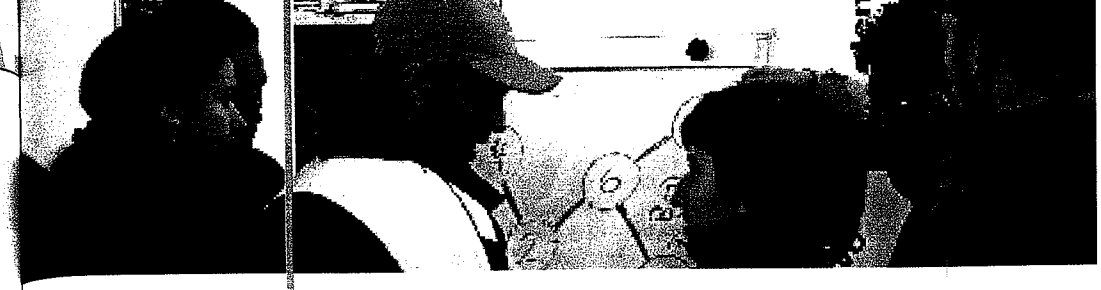
   A. $y = \frac{1}{2}$ **B.** $y = \frac{3}{2}$ **C.** $y = \frac{5}{2}$ **D.** $y = \frac{7}{2}$

9. Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iznosi 120°. Ako je $|\vec{a}| = 4$ i $|\vec{b}| = 5$, onda je:

   A. $|\vec{a} + \vec{b}| = 12$ **B.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 4\sqrt{7}$ **C.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$ **D.** $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{61}$

10. Jedinični vektor istog smjera, ali suprotne orijentacije od vektora $\overrightarrow{AB}$, $A(-1,2)$, $B(2,-2)$ jest vektor:

    A. $\vec{e} = -\frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$ **B.** $\vec{e} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$ **C.** $\vec{e} = -\frac{1}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$ **D.** $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$



22. lekcija

Aritmetički i geometrijski niz

22. lekcija Ponovimo

Niz

Niz u skupu S je funkcija $a : \mathbf{N} \to S$. Ona prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa S. Ako je $S \subset \mathbf{R}$, govorimo o nizu u skupu $\mathbf{R}$, tj. o **nizu realnih brojeva**.

Element a_n nazivamo **općim** ili n**-tim članom** niza, a sam niz označavamo simbolom (a_n). Niz ima beskonačno mnogo članova:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

Niz je određen ako mu je zadan opći član.

Niz (a_n) je **rastući** ako za svaki n vrijedi $a_n \leqslant a_{n+1}$. Niz (a_n) je **padajući** ako za svaki n vrijedi $a_n \geqslant a_{n+1}$. Za rastuće i padajuće nizove kažemo da su **monotoni**.

Niz (a_n) je **ograničen** ako postoje realni brojevi m i M takvi da vrijedi $m \leqslant a_n \leqslant M$ za svaki n. m se naziva **donja** a M **gornja** međa niza.

Aritmetički niz

Niz je **aritmetički** ako je razlika svakog člana i člana ispred njega stalna i iznosi d:

$$a_n - a_{n-1} = d, \qquad n \geqslant 2.$$

Broj d naziva se **razlika (diferencija) aritmetičkog niza**. Nekoliko prvih članova niza su $a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \ldots$.

Aritmetički niz s prvim članom a_1 i razlikom d ima opći član:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

U svakom aritmetičkom nizu vrijedi jednakost $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n > k$.

Općenitije vrijedi:

$$a_m + a_n = a_u + a_v \iff m + n = u + v.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Iskoristimo li formulu za opći član, možemo pisati $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Geometrijski niz

Niz je **geometrijski** ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \quad n \geq 2.$$

Broj q naziva se **količnik ili kvocijent geometrijskog niza**.

Geometrijski niz s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima opći član:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

U svakom geometrijskom nizu vrijedi jednakost $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$, $n > k$.

Općenitije vrijedi:

$$a_m \cdot a_n = a_u \cdot a_v \iff m + n = u + v.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza s kvocijentom $q \neq 1$ iznosi:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Geometrijski red

Izraz oblika:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

nazivamo **redom** i označavamo s $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Njegova n-ta parcijalna suma je:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Geometrijski red dobije se zbrajamo li članove geometrijskog niza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = a_1 + qa_1 + q^2 a_1 + \ldots$$

Geometrijski red ima konačnu sumu onda i samo onda ako vrijedi $|q| < 1$. Njegova je suma jednaka:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

22. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Zapišimo prvih pet članova niza (a_n) čiji je opći član $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Rješenje. Uvrštavanjem u dani izraz za a_n redom brojeva 1, 2, 3, 4 i 5 dobit ćemo prvih pet članova niza.

To su: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{9}{4}$, $a_3 = \frac{64}{27}$, $a_5 = \frac{625}{256}$, $a_5 = \frac{7776}{3125}$.

Ako bismo u ovom nizu išli dovoljno daleko, približavali bismo se broju $e \approx 2.71828$, koji je baza prirodnog logaritma ($\ln x = \log_e x$).

Tako imamo:

za $n = 10$, $a_{10} = 1.1^{10} \approx 2.59374$;
za $n = 100$, $a_{100} = 1.01^{100} \approx 2.70481$;
za $n = 1\,000$, $a_{1000} = 1.001^{1\,000} \approx 2.71692$;
za $n = 10\,000$, $a_{10\,000} = 1.0001^{10\,000} \approx 2.718146$.

Primjer 2.

U nizu (a_n) je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, a za $n \geq 2$ je $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Odredimo a_{777}.

Rješenje. Pojedini član niza, počevši s trećim, omjer je dvaju članova koji mu prethode. Tako možemo redom ispisivati: $1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots$.

Uočavamo kako se u ovom nizu uzastopce ponavlja skupina od šest brojeva 1, 2, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

Da bismo našli 777. član, podijelit ćemo 777 sa 6. Kako je $777 = 129 \cdot 6 + 3$, onda je 777. član ovog niza broj 2.

Primjer 3.

Dokaži da je niz (a_n), $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$ omeđen i odredi donju i gornju među.

Rješenje. Opći član niza je

$$\frac{2n-3}{n+1} = \frac{2(n+1)-5}{n+1} = 2 - \frac{5}{n+1}.$$

Za svaki prirodni n vrijedi

$$2 - \frac{5}{n+1} < 2,$$

te je $M = 2$ gornja međa.

Također, za svaki prirodni $n \geqslant 1$ vrijedi

$$2 - \frac{5}{n+1} \geqslant 2 - \frac{5}{1+1} = -\frac{1}{2},$$

te je $m = -\frac{1}{2}$ donja međa ovog niza.

Primjer 4.

Dokaži da je niz (a_n), $a_n = \frac{n}{(n+1)^2+1}$ padajući.

Rješenje. Nejednakost $a_n \geqslant a_{n+1}$ glasi:

$$\frac{n}{(n+1)^2+1} \geqslant \frac{n+1}{(n+2)^2+1}.$$

Ova je nejednakost ekvivalentna sa sljedećim:

$$\frac{n}{n^2+2n+2} \geqslant \frac{n+1}{n^2+4n+5},$$
$$n(n^2+4n+5) \geqslant (n+1)(n^2+2n+2),$$
$$n^3+4n^2+5n \geqslant n^3+3n^2+4n+2,$$
$$n^2+n \geqslant 2.$$

Posljednja nejednakost istinita je za sve $n \geqslant 1$.

Primjer 5.

U aritmetičkom je nizu $a_5 + a_9 = 11$, $a_5 \cdot a_9 = 28$. Odredimo opći član ovog niza.

Rješenje. Zamjenom $a_5 = a_1 + 4d$, $a_9 = a_1 + 8d$ dobivamo sustav jednadžbi pri čemu je prva jednadžba linearna, a druga kvadratna. Rješavamo ga tako da iz prve, linearne jednadžbe izrazimo jednu od nepoznanica i uvrstimo u drugu. Tako dobijemo kvadratnu jednadžbu s jednom nepoznanicom.

No, postupak rješavanja možemo provesti i učinkovitije primjenom *Vietéovih formula*. Izravno ćemo napisati kvadratnu jednadžbu čija su rješenja a_5 i a_9. To je jednadžba $x^2 - 11x + 28 = 0$.

Tako sada imamo: (1) $a_5 = 4$, $a_9 = 7$, ili (2) $a_5 = 7$, $a_9 = 4$.

U prvom slučaju iz $a_9 = a_5 + 4d$ slijedi $d = \frac{3}{4}$, a zatim i $a_1 = a_5 - 4d = 1$. Opći član niza je $a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{1}{4}(3n+1)$.

U drugom pak slučaju iz $a_9 = a_5 + 4d$ slijedi $d = -\frac{3}{4}$, a zatim i $a_1 = 10$. Opći član niza je $a_n = \frac{1}{4}(43 - 3n)$.

Ovaj zadatak nema jednoznačno rješenje, dva aritmetička niza ispunjavaju zadane uvjete.

Primjer 6.

Odredimo zbroj svih troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s 5 imaju ostatak 2 ili 3.

Rješenje. Ispišimo prvih nekoliko troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2 ili 3. To su redom brojevi:

$$102,\ 103,\ 107,\ 108,\ 112,\ 113,\ 117,\ 118,\ldots$$

Očito u ovom nizu imamo dva aritmetička podniza.

Prvi je 102, 107, 112, 117,... a drugi 103, 108, 113, 118,...

Posljednji član prvog podniza je 997, a drugoga 998.

Prvi niz ima $\frac{997-102}{5} + 1 = 180$ članova. Jednako toliko članova ima i drugi podniz.

I sada izračunajmo traženu sumu:

$$S_1 + S_2 = \frac{180}{2} \cdot (102 + 997) + \frac{180}{2} \cdot (103 + 998) = 98\,910 + 99\,090 = 198\,000.$$

Primjer 7.

Između $-\frac{1}{3}$ i $\frac{11}{12}$ umetnimo 9 brojeva koji će s dva dana činiti 11 uzastopnih članova aritmetičkog niza.

Rješenje. Iz podataka u zadatku slijedi da je $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_{11} = \frac{11}{12}$. Zato onda vrijedi $a_{11} = a_1 + 10d$. Nakon uvrštavanja nalazimo $d = \frac{1}{8}$.

Rješenje zadatka je niz: $-\frac{1}{3}, -\frac{5}{24}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{6}, \frac{7}{24}, \frac{5}{12}, \frac{13}{24}, \frac{2}{3}, \frac{19}{24}, \frac{11}{12}$.

Primjer 8.

Nađimo zbroj svih negativnih članova niza čiji je opći član: $a_n = \frac{1}{2}n - 25$.

Rješenje. Najprije iz uvjeta $a_n < 0$ dobijemo nejednadžbu $\frac{1}{2}n - 25 < 0$ čije je rješenje $n < 50$. U ovom je nizu, dakle, ukupno 49 negativnih članova i to je baš prvih 49.

Kako je $a_1 = -\frac{49}{2}$, $a_{49} = -\frac{1}{2}$, onda je

$$S_{49} = \frac{49}{2} \cdot \left(-\frac{49}{2} - \frac{1}{2}\right) = -612.5.$$

Primjer 9.

U nekom aritmetičkom nizu (a_n) je $a_{12} + a_{13} + a_{14} = 33$. Koliko je $a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{25}$?

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti koristeći se činjenicom da je $a_m + a_n = a_u + a_v$ ako i samo ako je $m + n = u + v$.

Tako je onda $a_{12} + a_{13} + a_{14} = (a_{12} + a_{14}) + a_{13} = (a_{13} + a_{13}) + a_{13} = 3a_{13} = 33$, pa je $a_{13} = 11$.

I sada je $a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{25} = (a_1 + a_{25}) + (a_4 + a_{22}) + (a_7 + a_{19}) + (a_{10} + a_{16}) + a_{13} = 9a_{13} = 99$.

Primjer 10.

Najmanji unutarnji kut konveksnog mnogokuta jednak je $100°$, a svaki sljedeći veći je za $10°$. Koliko stranica ima taj mnogokut?

Rješenje. Zbroj unutarnjih kutova konveksnog mnogokuta s n stranica jednak je $S_n = (n-2) \cdot 180°$. No, kutovi čine aritmetički niz s n članova pa možemo zapisati jednadžbu:

$$\frac{n}{2} \cdot (190° + 10n) = (n-2) \cdot 180°.$$

Kad je sredimo, ta jednadžba prima oblik $n^2 - 17n + 72 = 0$. Njezina su rješenja $n = 8$ ili $n = 9$.

Prihvaćamo samo prvo rješenje. Kad bi bilo $n = 9$, četverokut bi imao jedan kut veći od $180°$ i ne bi bio konveksan.

Primjer 11.

Drugi član geometrijskog niza jednak je 3, a peti član istog niza je 12. Odredimo osmi član ovog niza.

Rješenje. Prema definiciji geometrijskog niza je $a_5 = a_2 \cdot q^3$. Odatle slijedi $q^3 = 4$. Kako bismo odredili a_8, ne moramo računati količnik. Vrijedi, naime, $a_8 = a_5 \cdot q^3 = 12 \cdot 4 = 48$.

No, primijetimo kako smo mogli izravno primijeniti sljedeće svojstvo geometrijskog niza: $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$. U našem je zadatku $a_5^2 = a_2 \cdot a_8$, a odatle slijedi: $12^2 = 3 \cdot a_8$, te je $a_8 = 48$.

Primjer 12.

Napišimo deseti član geometrijskog niza $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{2}$,.... Odredimo sve racionalne članove u ovom nizu.

Rješenje. Količnik ovog niza jednak je $q = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{8}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

Deseti član ovoga geometrijskog niza je jednak:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^9 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt[6]{2})^9} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2}.$$

Riješimo sada i drugi dio zadatka. Opći član ovog niza je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^{n-1} = 2^{\frac{4-n}{6}}$. Broj a_n će biti racionalan kad eksponent $\dfrac{4-n}{6}$ bude cijeli broj. A on će biti cijeli broj za svaki cijeli broj k za koji je $4 - n = 6k$. Tada će biti $n = 4 - 6k$.

No, broj n je prirodni broj pa zbog $4 - 6k > 0$ mora biti $k < \dfrac{2}{3}$.

Sada za $k = 0$ imamo $n = 4$ te je $a_4 = 1$, zatim se za $k = -1$ dobije $a_{10} = \dfrac{1}{2}$, pa za $k = -2$ slijedi $a_{16} = \dfrac{1}{4}$, itd.

Tako u nizu (a_n) racionalni članovi čine podniz (b_n) u kojem je $a_1 = 1$ te $q = \dfrac{1}{2}$. To je niz s općim članom $b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Primjer 13.

U nekom je geometrijskom nizu $a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_{31} = 625$. Koliko je a_{16}?

Rješenje. U rješavanju zadatka primijenimo važno svojstvo geometrijskog niza:

$$a_m \cdot a_n = a_u \cdot a_v \iff m + n = u + v.$$

Zato je $a_1 \cdot a_{31} = a_3 \cdot a_{29} = \ldots = a_{15} \cdot a_{17} = a_{16}^2$ te slijedi $a_{16}^{16} = 5^4$.

Dakle je $a_{16} = \sqrt[4]{5}$.

Primjer 14.

U nekom je gradu godišnji prirast stanovništva iznosi 5%. Izrazimo u postocima ukupan prirast stanovništva toga grada nakon pet godina.

Rješenje. Neka je N broj stanovnika grada na početku promatranja. Nakon godinu dana u gradu je $N + 0.05N = 1.05N$ stanovnika. Nakon druge godine u gradu će biti $1.05N + 1.05N \cdot 0.05 = 1.05N \cdot (1 + 0.05) = 1.05N \cdot 1.05 = 1.05^2N$ stanovnika. Analogno, nakon treće će godine biti 1.05^3N, nakon četvrte 1.05^4N stanovnika i tako dalje. Nakon $n-$te godine grad će imati 1.05^nN stanovnika.

Zaključujemo: Nakon pet godina u gradu će, uz stalni godišnji prirast od 5%, biti $1.05^5N \approx 1.2763N$ stanovnika, što je ukupan prirast od približno 27.63%.

Primjer 15.

U čaši od pola litre je četvrt litre sirupa, četvrt litre vode. Popijemo pola čaše soka i dolijemo do vrha vode. Zatim opet popijemo pola čaše soka i opet dolijemo vodu. Nakon kojeg će ispijanja u čaši biti manje od 1% sirupa?

Rješenje. Nakon prvog ispijanja u čaši je ostalo $\dfrac{1}{8}$ sirupa. Nakon drugog, u čaši je ostalo $\dfrac{1}{16}$ sirupa, nakon trećeg ostalo je $\dfrac{1}{16}$ itd. I tako se količina sirupa u čaši umanjuje i redom je $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{16}$,.... Umanjenje se odvija tako da su količine sirupa članovi geometrijskog niza $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

I sada postavljamo uvjet $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} < 0.01$. Logaritmiramo ovu nejednakost pa je $(n+1) \cdot \log 0.5 < \log 0.01 = -2$. Dalje je $n + 1 > \dfrac{-2}{-0.301} \approx 6.64$, a odatle $n > 5.54$. Zaključujemo $n = 6$. Nakon 6. otpijanja u čaši će biti $\dfrac{1}{128}$ čaše sirupa što je manje od 1%.

22. lekcija Zadaci

1. Zadan je niz (a_n):
$a_n = \begin{cases} 4n-1, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ -1, & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$
Koliki je zbroj prvih 100 članova ovog niza?

2. Odredite 100. član niza (a_n) ako je $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, i $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

3. Odredite opći član aritmetičkog niza ako je $a_5 + a_{10} = 33$ i $a_5 \cdot a_{10} = -484$.

4. Dan je aritmetički niz $-\frac{11}{2}, -\frac{29}{6}, -\frac{25}{6}, -\frac{7}{2}, \ldots$. Za koje n vrijedi $|a_n| < 1$?

5. Odredite zbroj svih negativnih članova aritmetičkog niza $-111, -108, -105, \ldots$.

6. Odredite brojeve koji su uzastopni članovi aritmetičkog niza ako je zbroj prvih četiriju jednak 12, zbroj četiriju posljednjih 20, a zbroj svih članova niza 52.

7. Odredite x tako da dana tri broja budu uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza:
1) $\sqrt{x-1}, \sqrt{5x-1}, \sqrt{12x+1}$;
2) $\log 2^x, \log(2^x+1), \log(2^x+4)$.

8. Za koji su realni broj x brojevi $\frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+1}, \frac{1}{x-1}$ tri uzastopna člana nekog aritmetičkog niza?

9. U nekom je aritmetičkom nizu $S_5 = 15$, $S_{15} = 135$. Koliko je S_{10}?

10. Koliko najmanje članova aritmetičkog niza 3, 7, 11,... treba zbrojiti kako bi zbroj bio veći od 900?

11. Odredite peti član geometrijskog niza ako je prvi član niza $a_1 = 4 \cdot \sqrt[3]{5}$, a količnik niza je $q = \sqrt[6]{5}$.

12. U nekom je geometrijskom nizu $a_2 + a_4 = -\frac{5}{12}$, $a_2 \cdot a_4 = \frac{1}{36}$. Kako glasi opći član ovog niza?

13. Između 1 i 8 umetnite pet brojeva koji će s dva zadana činiti 7 uzastopnih članova rastućeg geometrijskog niza.

14. Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza jednak je -15, a zbroj triju sljedećih članova iznosi 120. Ispišite tih šest članova niza.

15. Prvi član geometrijskog niza jednak je $2\sqrt[3]{3}$, a količnik niza iznosi $\sqrt[6]{3}$. Odredite zbroj prvih pet racionalnih članova ovog niza.

16. Umnožak 3. i 13. člana geometrijskog niza jednak je 2. Koliki je umnožak prvih 15 članova ovog niza?

17. U nekom geometrijskom nizu je $a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots a_{20} = 32$. Odredite 11. član ovog niza.

18. Zbroj prvih n članova niza zadan je formulom $S_n = 3 \cdot (1 - 2^n)$ za svaki prirodni broj n. Odredite taj niz.

22. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Opći član niza (a_n) je $a_n = (-1)^n \cdot \sin\frac{n\pi}{3}$. Zbroj 14. i 34. člana ovog niza jednak je:
A. 0 **B.** $-\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 1

2. Zbroj dvostrukoga drugog i trostrukog sedmog člana aritmetičkog niza jednak je 70. Peti član toga niza je broj:
A. 14 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 35

3. Zbroj prvih triju članova rastućeg aritmetičkog niza jednak je -12, njihov je umnožak 36. Razlika niza iznosi:
A. $d = 3$ **B.** $d = 2$ **C.** $d = 4$ **D.** $d = 5$

4. Za koji x su brojevi $\log_3(4x)$, $\log_3(2x+3)$, $\log_3(x+6)$ članovi aritmetičkog niza?
A. $x = \frac{3}{4}$ **B.** $x = 9$ **C.** $x = \frac{1}{2}$ **D.** $x = \sqrt{3}$

5. Koliko brojeva treba umetnuti između -22 i 18 da bi se dobio aritmetički niz čiji je zbroj jednak -42?
A. 20 **B.** 19 **C.** 22 **D.** 21

6. Ako je 4. član geometrijskog niza jednak 3, umnožak prvih sedam članova tog niza iznosi:
A. 3^5 **B.** 3^6 **C.** 3^7 **D.** 3^8

7. Prvi po redu racionalan član geometrijskog niza $\sqrt{3}, \sqrt[4]{27}, 3, \ldots$ je broj 3. Treći po redu racionalan član u istom nizu je broj:
A. 12 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** 27 **D.** 81

8. Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza jednak je 168, zbroj triju sljedećih je 21. Količnik niza je broj:
A. $q = \frac{1}{2}$ **B.** $q = \frac{2}{3}$ **C.** $q = \frac{1}{4}$ **D.** $q = \frac{3}{4}$

9. Rješenje jednadžbe $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-4} = 6.5 + 3.25 + 1.625 + \ldots$ je broj:
A. $x = 3$ **B.** $x = 4$ **C.** $x = 5$ **D.** $x = 6$

10. Netko štedeći pet godina uz kvartalno ukamaćivanje želi povećati glavnicu za 25%. Kamatna stopa treba biti:
A. 3% **B.** 3.5% **C.** 4% **D.** 4.5%

Ispit 2

1. Koliki je umnožak drugog osmog i šesnaestog člana niza s općim članom $a_n = \sqrt{n}$?
   A. 16 **B.** 36 **C.** 24 **D.** 48

2. Ako je $1+4+7+\ldots+x=1\,001$, onda je:
   A. $x=26$ **B.** $x=64$ **C.** $x=32$ **D.** $x=76$

3. U aritmetičkom nizu 20 je članova. Zbroj onih na parnim mjestima iznosi 280, a onih na neparnim 260. Opći član tog niza jest:
   A. $a_n=48-2n$ **B.** $a_n=4n+8$ **C.** $a_n=44-4n$ **D.** $a_n=2n+6$

4. Zbroj svih troznamenkastih prirodnih brojeva koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 2 jednak je:
   A. 7 600 **B.** 70 592 **C.** 47 511 **D.** 101 000

5. Koliko je pozitivnih članova u aritmetičkom nizu 111, 105, 99,...?
   A. 17 **B.** 18 **C.** 19 **D.** 20

6. Broj članova geometrijskog niza u kojem su prvi, drugi i posljednji član niza redom 3, 12 i 3072 jednak je:
   A. $n=10$ **B.** $n=8$ **C.** $n=12$ **D.** $n=6$

7. Brojevi $\sqrt{2}$, x, $\sqrt{18}$ uzastopni su članovi geometrijskog niza. Količnik tog niza je broj:
   A. $q=\sqrt{6}$ **B.** $q=\sqrt{3}$ **C.** $q=3$ **D.** $q=9$

8. Zbroj dekadskih logaritama prvih jedanaest uzastopnih članova geometrijskog niza jednak je 5.5. Šesti član tog niza je:
   A. $\sqrt{10}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $2\sqrt{2}$

9. Manje rješenje jednadžbe:
   $$\left(3\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)\right)^{\log_2 x}=\left(20\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots\right)\right)^{\log_x 2}$$
   je broj:
   A. $x=\frac{1}{2}$ **B.** $x=2$ **C.** $x=-\frac{1}{2}$ **D.** $x=\frac{1}{4}$

10. Netko uloži 20 000 uz polugodišnji pripis kamata i uz stopu 5%. Ako su očekivane kamate 5 600 kn, na koji je rok ugovorena štednja?
    A. 10 god. **B.** 15 god. **C.** 7.5 god. **D.** 5 god.

Ispit 3

1. Zbroj trećeg, šestog i devetog člana niza s općim članom $a_n=n^{-2}$ iznosi:
   A. $\frac{11}{324}$ **B.** $\frac{36}{289}$ **C.** $\frac{121}{576}$ **D.** $\frac{49}{324}$

2. Zbroj prvih pet uzastopnih članova padajućeg aritmetičkog niza iznosi 20. Geometrijska sredina prvog i petog člana je $\sqrt{7}$. Odredi prvi negativni član ovog niza.
   A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{3}{4}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{4}$

3. Opći član aritmetičkog niza 2.5, 1.9, 1.3, 0.7, 0,1, -0.5,... je:
   A. $a_n=-0.4n+2.9$ **B.** $a_n=3.6n-1.1$
   C. $a_n=-0.6n+3.1$ **D.** $a_n=-0.5n+3$

4. Brojevi $\sqrt{x+7}$, $\sqrt{x-5}$ i $\sqrt{x-9}$ uzastopni su članovi aritmetičkog niza. Njihov je zbroj jednak:
   A. 6 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 24

5. Zbroj tri uzastopna člana geometrijskog niza jednak je 126. Ako je srednji član jednak 24, najmanji je:
   A. 8 **B.** 12 **C.** 4 **D.** 6

6. U geometrijskom je nizu $a_1\cdot a_3\cdot a_5\cdots a_{19}=32$. Deseti član ovog niza je:
   A. $\sqrt[4]{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt[3]{4}$

7. Između $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{64}$ umetni četiri broja tako da s dva zadana čine geometrijski niz od šest članova. Koliki je zbroj tog niza?
   A. 1 **B.** $\frac{1}{32}$ **C.** $\frac{63}{64}$ **D.** $\frac{1}{4}$

8. Izračunaj umnožak: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[12]{2}\cdot\sqrt[24]{2}\cdot\ldots$.
   A. $\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt[3]{4}$ **C.** $\sqrt[4]{2}$ **D.** 1

9. Ako je $0.2\dot{7}+0.5\dot{4}=\frac{a}{b}$, $a,\ b\in\mathbf{N}$ i $M(a.b)=1$, koliko je $a+b$?
   A. 33 **B.** 28 **C.** 25 **D.** 20

10. Ako ulaganjem u banku uz 5% kamata i godišnje ukamaćivanje želimo udvostručiti ulog, onda će štednja trajati:
    A. 14 god. **B.** 10 god. **C.** 12 god. **D.** 8 god.

Ispit 4

1. Zadan je niz (a_n): $a_n = \begin{cases} -1, & \text{ako je } n \text{ paran broj,} \\ 2n-1, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$. Zbroj prvih 100 članova ovog niza iznosi:

A. 4 500 **B.** 4 000 **C.** 4 900 **D.** 5 050

2. Zbroj trostrukog trećeg i četverostrukog desetog člana aritmetičkog niza jednak je 140. Sedmi član tog niza je broj:

A. 20 **B.** 24 **C.** 30 **D.** 35

3. Prva tri člana aritmetičkog niza su brojevi $\frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+1}, \frac{1}{x-1}$. Pedeseti član ovog niza je:

A. 7.25 **B.** -12 **C.** 3.75 **D.** -12.5

4. U nekom je aritmetičkom nizu $a_7 + a_9 + a_{11} = 15$. Koliko je S_{17}?

A. 85 **B.** 75 **C.** 105 **D.** 90

5. Koliko brojeva treba umetnuti između -22 i 18 da bi se dobio aritmetički niz čiji je zbroj jednak -42?

A. 19 **B.** 20 **C.** 21 **D.** 22

6. Broj 1 458 član je geometrijskog niza u kojem su prva dva člana 2 i 54. Koji je po redu to član?

A. treći **B.** peti **C.** sedmi **D.** deveti

7. Zbroj prvog i četvrtog člana geometrijskog niza jednak je -38, a zbroj drugog i trećeg je 12. Dva su niza s ovim svojstvom. Umnožak njihovih količnika jednak je:

A. 6 **B.** -4 **C.** 1 **D.** -12

8. Ako je 4. član geometrijskog niza jednak 3, umnožak prvih sedam članova tog niza iznosi:

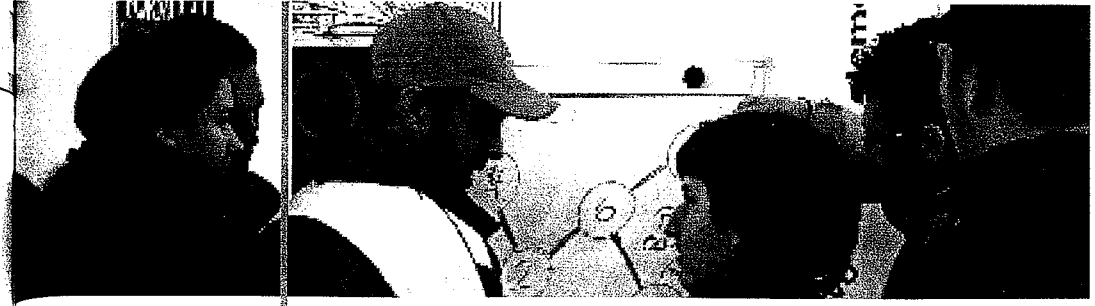
A. 343 **B.** 2 187 **C.** 177 147 **D.** 81

9. Zbroj dekadskih logaritama devet uzastopnih članova geometrijskog niza jednak je 9. Umnožak dvaju krajnjih od tih 9 članova jednak je:

A. 100 **B.** $\sqrt{10}$ **C.** 10 **D.** 0.01

10. Gumena kuglica ispuštena je s neke visine okomito na tvrdu podlogu. Svaki put kad udari u nju, odbije se do $\frac{2}{3}$ visine pri prethodnom odbijanju. Ukupan put koji prevali kuglica do potpuna umirenja dug je 9.5 m. Kuglica je ispuštena s visine:

A. 1.9 m **B.** 2 m **C.** 2.2 m **D.** 3 m



23. lekcija

Derivacije funkcija

23. lekcija Ponovimo

Derivacija funkcije

Derivacija funkcije f **u točki** x_0 je broj:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Za funkciju f kažemo da je **derivabilna (diferencijabilna)** na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako u svakoj točki x_0 tog intervala postoji derivacija $f'(x_0)$. Time je na intervalu $\langle a, b\rangle$ definirana funkcija f' koju nazivamo **derivacijom** funkcije f.

Derivaciju još označavamo simbolima $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

Pravila deriviranja

Tablica derivacija osnovnih funkcija.

$$C' = 0, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x,$$
$$x' = 1, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$
$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu I. Tada vrijede sljedeća pravila:

1. **Derivacija zbroja.** Funkcija $f + g$ je derivabilna i vrijedi:
$$(f + g)' = f' + g'.$$
2. **Derivacija umnoška.** Funkcija $f \cdot g$ je derivabilna i vrijedi:
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$
3. **Derivacija kvocijenta.** Funkcija f/g je derivabilna u svakoj točki u kojoj je definirana i vrijedi:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Napomena! Upamtite sljedeće: ako je C konstanta, onda vrijedi:

$$C' = 0, \qquad (C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x), \qquad \left(\frac{f(x)}{C}\right)' = \frac{f'(x)}{C}.$$

Derivacije višeg reda

Ako funkcija f ima derivaciju u svakoj točki intervala $\langle a, b\rangle$, onda je f' i sama funkcija definirana na tom intervalu. Njezinu derivaciju označavamo s f'' i nazivamo je **drugom derivacijom** funkcije f. Analogno se definiraju derivacije višeg reda, tako za $n \in \mathbf{N}$, derivaciju n-tog reda označavamo s $f^{(n)}$ i definiramo:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Derivacija složene funkcije (pravilo o ulančanom deriviranju)

Derivaciju složene funkcije računamo formulom:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

što zapisujemo još i na ovaj način:

$$f(g(x))' = f'(u) \cdot g'(x), \quad u = g(x).$$

Tablica deriviranja složenih funkcija.

$$\left(f^n\right)' = nf^{n-1} \cdot f', \qquad (\sin f)' = \cos f \cdot f',$$
$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot f', \qquad (\cos f)' = -\sin f \cdot f',$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2} \cdot f', \qquad (\operatorname{tg} f)' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$$
$$\left(\frac{1}{f^n}\right)' = -\frac{n}{f^{n+1}} \cdot f', \qquad (\operatorname{ctg} f)' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f',$$
$$\left(e^f\right)' = e^f \cdot f', \qquad (\ln f)' = \frac{1}{f} \cdot f'.$$

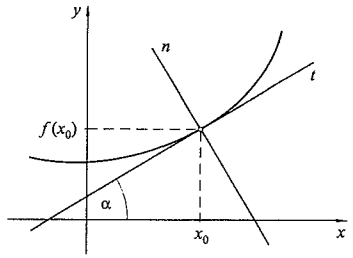
Pravilo za deriviranje inverzne funkcije.
Ako su $y = f(x)$ i $x = g(y)$ međusobno inverzne funkcije, onda vrijedi:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}, \qquad y = f(x).$$

Tangenta i normala na graf funkcije

Tangenta. Ako je pravac tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ na grafu funkcije, onda je njegov koeficijent smjera k jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$



Tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) ima jednadžbu:

$$t \quad \ldots \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normala na graf funkcije u točki (x_0, y_0) jest pravac okomit na tangentu. Koeficijent smjera normale glasi:

$$-\frac{1}{f'(x_0)}, \qquad (f'(x_0) \neq 0).$$

Normala na graf funkcije u istoj točki (x_0, y_0) ima jednadžbu:

$$n \quad \ldots \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

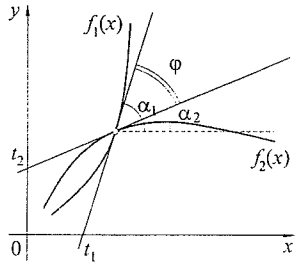
Napomena! Ako je $f'(x_0) = 0$, onda su tangenta i normala paralelne s koordinatnim osima i imaju jednadžbu:

$$t \ldots y - y_0 = 0$$
$$n \ldots x - x_0 = 0.$$

Kut između krivulja

Kut pod kojim se sijeku dvije krivulje definira se kao kut između njihovih tangenata u sjecištu.

Neka je α_1 kut koji zatvara prva tangenta s pozitivnim dijelom x-osi, k_1 njezin koeficijent smjera, α_2 kut koji zatvara druga tangenta i k_2 njezin koeficijent smjera. Kut pod kojim se sijeku krivulje je $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$.



Ovaj kut računamo direktno s pomoću formule:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (1)$$

Koeficijente smjera računamo s pomoću derivacija:

$$k_1 = f_1'(x_0). \qquad k_2 = f_2'(x_0).$$

23. lekcija Primjeri

Primjer 1.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = x^2 + 2$ u točki $x_0 = 1$.

Rješenje. Prema definiciji derivacije vrijedi:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 2 - (x_0^2 + 2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0,$$

te je $f'(1) = 2$.

Primjer 2.

Derivirajmo funkciju $f(x) = \frac{2}{x} + 3\sqrt{x}$.

Rješenje. Prema pravilu o derivaciji zbroja vrijedi:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' + \left(3\sqrt{x}\right)'.$$

Sada je:

$$\left(\frac{2}{x}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)', \quad \left(3\sqrt{x}\right)' = 3 \cdot \left(\sqrt{x}\right)'.$$

Primijenimo sada tablicu derivacija:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(Ove je dvije derivacije korisno upamtiti!) Dobivamo:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Primjer 3.

Derivirajmo funkciju **1)** $f(x)=(x+1)\sqrt{x}+\frac{1}{x}$, **2)** $g(x)=x\cdot\sin x$.

Rješenje. **1)** Prema pravilu o derivaciji umnoška i zbroja imamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'\sqrt{x}+(x+1)(\sqrt{x})'+\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= 1\cdot\sqrt{x}+(x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

2) Prema pravilima o derivaciji umnoška i trigonometrijskih funkcija imamo:

$$f'(x)=(x)'\cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x.$$

Primjer 4.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x)=\sin\sqrt{1+x^2}$.

Rješenje. Dana je funkcija složena te primjenjujemo pravilo o ulančanom deriviranju:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\sqrt{1+x^2}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)' \\ &= \cos\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+x^2\right)' \\ &= \frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Primjer 5.

Derivirajmo funkciju $f(x)=\ln\sqrt{xe^x}$.

Rješenje. Dana funkcija je složena te primjenjujemo pravila o ulančanom deriviranju te o derivaciji eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{xe^x}}\cdot\left(\sqrt{xe^x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{xe^x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xe^x}}\cdot(xe^x)' \\ &= \frac{1}{2xe^x}\cdot(e^x+xe^x)=\frac{1+x}{2x}. \end{aligned}$$

Primjer 6.

Derivirajmo funkciju $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

Rješenje. Prema pravilima o derivaciji kvocijenta, zbroja i trigonometrijskih funkcija imamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x-\cos x)'\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x+\cos x)^2+(\cos x-\sin x)^2}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x} \\ &= \frac{2}{1+2\sin x\cos x}. \end{aligned}$$

Primjer 7.

Kolika je površina trokuta što ga s koordinatnim osima zatvara tangenta na graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x}$ u točki s apscisom $x_0=\dfrac{1}{2}$?

Rješenje. Jednadžba tangente na graf funkcije $f(x)$ u točki (x_0,y_0) glasi:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

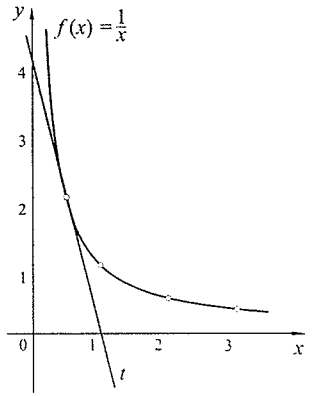
Derivacija funkcije je $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, te izračunamo:

$$f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4,$$

$$y_0=f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2.$$

Tako imamo:

$$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)=-4x+2.$$



Tražena tangenta ima jednadžbu $y=-4x+4$.

Njezin odrezak na osi ordinata je 4, a odrezak na osi apsisa je 1 (nultočka ovog pravca). Površina trokuta iznosi 2.

Primjer 8.

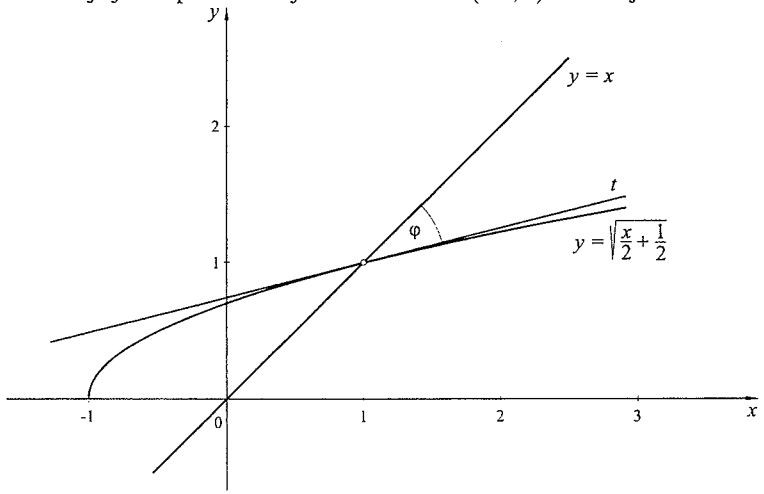
Pod kojim kutom pravac $y = x$ siječe krivulju $y = \sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$?

Rješenje. Odredimo najprije koordinate točke u kojoj pravac siječe parabolu:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}},$$
$$x^2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

i odavde $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Budući da je korijen uvijek pozitivan, negativno rješenje ne zadovoljava početnu jednadžbu. Koordinate presječne točke su $(1, 1)$.

Graf funkcije je dio parabole s tjemenom u točki $(-1, 0)$. Nacrtajmo sliku.



Koeficijent pravca $y = x$ je $k_1 = 1$. Da bismo našli kut pod kojim taj pravac siječe parabolu, trebamo odrediti koeficijent smjera tangente na parabolu u točki $(1, 1)$. Vrijedi:

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \implies y'(1) = \frac{1}{4}.$$

Koeficijent smjera tangente je $k_2 = \frac{1}{4}$. Kut između ovih pravaca računamo iz

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}.$$

Odavde je $\varphi = 30^\circ 57' 50''$.

Primjer 9.

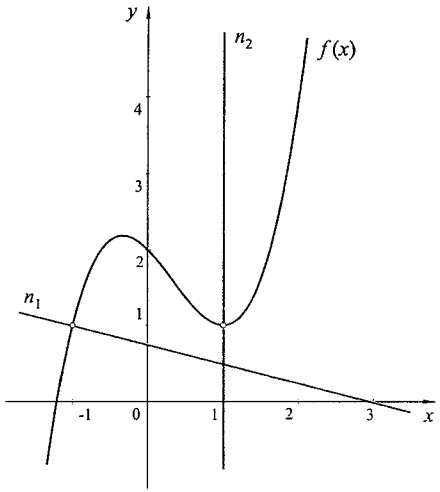
Odredimo jednadžbe normala na graf funkcije $y = x^3 - x^2 - x + 2$ u točkama u kojima je vrijednost funkcije jednaka 1.

Rješenje. Potražimo o kojim je točkama riječ. Iz $y = 1$ slijedi:

$$x^3 - x^2 - x + 2 = 1 \iff x^2(x - 1) - (x - 1) = 0 \iff$$
$$(x^2 - 1)(x - 1) = 0 \iff (x - 1)^2(x + 1) = 0.$$

Za $x_1 = -1$ dobivamo $T_1(-1, 1)$, a za $x_2 = 1$ dobivamo $T_2(1, 1)$.

Na temelju ovih podataka možemo nacrtati graf fnkcije f.



U točki T_1 derivacija funkcije iznosi:

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 \implies y'(-1) = 4.$$

Zato je jednadžba normale u točki $T_1(-1, 1)$:

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x + 1) \iff y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

U točki T_2 derivacija funkcije je $y'(1) = 0$. To znači da je tangenta paralelna s x-osi, pa je normala paralelna s y-osi. Njezina je jednadžba $x = 1$.

23. lekcija Zadaci

1. Odredite vrijednost derivacije funkcije $f(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{4} + 3x + \sqrt{2}$ u točki $x_0 = -1$.

2. Odredite točke u kojima je vrijednost derivacije funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$ jednaka 9.

3. Odredite derivaciju funkcije:

1) $f(x) = (x^2 + 1)\ln x + 2$;

2) $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x}$;

3) $f(x) = e^{2x}(x^2 + 2x - 3) + e^{-2x}$;

4) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \sqrt{x} + \sqrt{2x+1}$;

5) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}$;

6) $f(x) = \cos^3(2x) + \sin^3(2x)$.

4. Odredite derivacije funkcije:

1) $y = \frac{1+2x}{3-2x}$; **2)** $y = \frac{x^2}{2x-1}$;

3) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$; **4)** $y = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

5. Odredite vrijednost derivacije u nultočki funkcije $f(x) = (x^2+2x+2)(x+2)$.

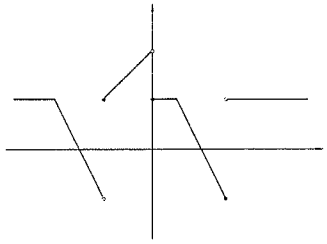
6. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ u točki $x_0 = 3$.

7. U kojim je točkama derivacija funkcije $f(x) = \frac{3}{(2-x)^3}$ jednaka 1?

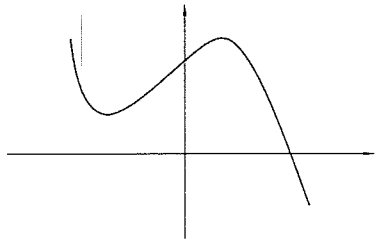
8. Ako je $f(x) = g(x)^2$, $f'(2) = 4$ i $g(2) = 1$, koliko iznosi $g'(2)$?

9. Ako je $f(x) = \sqrt{g(x)}$, $f'(1) = 4$ i $g'(1) = 1$, koliko iznosi $f(1)$?

10. Na slici je nacrtan graf funkcije f. Opišite ponašanje te funkcije i odredite njezinu jednadžbu.

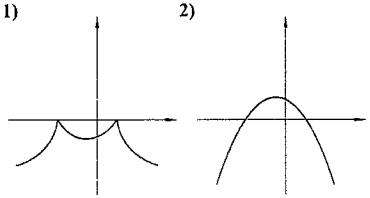


11. Na slici je nacrtan graf funkcije f:



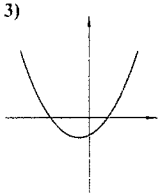
Na kojoj je od sljedećih slika nacrtan graf derivacije f'?

1)

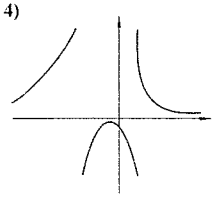


2)

3)



4)



12. Neka je $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 1$.

1) Odredite $f^{-1}(5)$ ne računajući $f^{-1}(x)$.

2) Odredite $f'(6)$.

3) Odredite $(f^{-1})'(5)$.

4) Odredite $f^{-1}(x)$, $(f^{-1})'(x)$ i provjerite prethodne rezultate.

13. Ako je $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$, odredi $(f^{-1})'(7)$.

14. Odredite drugu derivaciju funkcije $f(x) = x^2 \ln x + \sin 2x$.

15. Odredite drugu derivaciju funkcije $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ u točki $x = 1$.

16. Odredite koeficijent smjera tangente na krivulju u točki s apscisom x_0:

1) $y = \sqrt{2x + 3x^2}$, $x_0 = 1$;

2) $y = \frac{2}{x - x^2}$, $x_0 = 2$;

3) $y = (2x+1)^4$, $x_0 = 0$;

4) $y = x \cdot \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

17. Odredite jednadžbu tangente na krivulju u točki sa zadanom apscisom:

1) $y = 2x^2 - x - 2$, $x_0 = 1$;

2) $y = \sqrt{2x} + 1$, $x_0 = 2$;

3) $y = x^3 - 3x^2$, $x_0 = 2$;

4) $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

18. Odredite jednadžbu tangente na krivulju u točki sa zadanom apscisom:

1) $y = 0.25x^2 + x - 1$, $x_0 = 2$;

2) $y = x - x^2 + 2$, $x_0 = -1$;

3) $y = e^x + 1$, $x_0 = 0$;

4) $y = \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

19. Odredite jednadžbe tangenata na krivulju u točkama gdje graf siječe os apscisa:

1) $y = 6x^2 - 5x + 1$;

2) $y = x^3 - 4x$.

20. Odredite jednadžbu normale na krivulje u točki sa zadanom apscisom:

1) $y = x^2 + 1$, $x_0 = 2$;

2) $y = \frac{2}{x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

4) $y = (x+2)\sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

21. U kojim je točkama na grafu funkcije tangenta paralelna sa zadanim pravcem?

1) $y = x^3 - x$, pravac $y = 2x$;

2) $y = x^2 - 3x + 2$, pravac $2x + y = 5$;

3) $y = x^2 - 2x + 1$, pravac $y = 2x$;

4) $y = 2e^{-x} + 1$, pravac $y = -2x + 2$;

5) $y = x^3 + x - 2$, pravac $y = 4x + 2$.

22. Pod kojim kutom krivulja $y = \frac{1}{3}\sin 3x$ siječe os Ox u ishodištu?

23. Tangenta na graf funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 1$ paralelna je s pravcem $y = -5x$. Napišite jednadžbu te tangente.

24. Tangenta na graf funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 12$ paralelna je s pravcem $y = 6x$. Napišite jednadžbu te tangente.

25. U kojim točkama na krivulji $y = x^3 + 2$ je tangenta

1) paralelna s pravcem $12x - y = 4$;

2) okomita na pravac $x + 3y = 5$?

26. Odredite jednadžbe tangente i normale na parabolu $y = 4x^2$ u točki $(-1, 4)$.

27. Za koju je vrijednost parametra b pravac $y = 7x + b$ tangenta na graf funkcije $f(x) = x^3 - 5x - 7$?

23. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Derivacija funkcije $f(x) = \cos 3 + e^{3x}$ u točki $x_0 = 1$ je:
   A. e^3 **B.** $3e^3$ **C.** $-\sin 3 + e^3$ **D.** $-\sin 3 + 3e^3$

2. Derivacija funkcije $f(x) = (x+1)^2 \cdot \sqrt{x-1}$ je:
   A. $\dfrac{(x+1)(5x-3)}{2\sqrt{x-1}}$ **B.** $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ **C.** $x+1$ **D.** $\dfrac{x+1}{2(x-1)}$

3. Derivacija funkcije $f(x) = \ln\left(x\sqrt{x}\right)$ je:
   A. $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ **B.** $\dfrac{2+x}{2x^2}$ **C.** $\dfrac{3}{2x}$ **D.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4. Kut koji zatvara krivulja $y = x^2 + 2x + 3$ s osi ordinata, u točki u kojoj siječe tu os, iznosi:
   A. $26°34'$ **B.** $63°26'$ **C.** $26°57'$ **D.** $63°43'$

5. Tangente na graf funkcija $f(x) = 2x^2 - 3$ i $g(x) = \ln(3x) + 2$ povučene u točkama s istom apscisom su paralelne. Kolika je ta apscisa?
   A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** 2 **C.** 1 **D.** $\dfrac{1}{2}$

6. Jednadžba tangente na krivulju $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$ u točki s apscisom $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ glasi:
   A. $2\sqrt{3}x + 2y - \sqrt{3}\pi - 3 = 0$ **B.** $2x + 2y - \sqrt{3} - \pi = 0$
   C. $2x + 2y - 3 - \pi = 0$ **D.** $2\sqrt{3}x + 2y - \sqrt{3}\pi - \sqrt{3} = 0$

7. Jednadžba normale na krivulju $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}$ u točki s apscisom $x_0 = 1$ glasi:
   A. $y + 3x = 4$ **B.** $y - 3x = -2$ **C.** $3y + x = 4$ **D.** $-3y + x = 2$

8. Apscisa x_0 točke u kojima je tangenta na krivulju $y = x^2 - 2x + 5$ okomita na pravac $y = -\dfrac{1}{2}x$ iznosi:
   A. $x_0 = 1$ **B.** $x_0 = 2$ **C.** $x_0 = \dfrac{3}{4}$ **D.** $x_0 = 0$

9. Kolika je površina trokuta koji s koordinatnim osima zatvara tangenta na graf funkcije $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2}$, povučena u točki na grafu s ordinatom 9?
   A. 16 **B.** 32 **C.** 8 **D.** $\dfrac{5^4}{2^6}$

Ispit 2

1. Derivacija funkcije $f(x) = \dfrac{\pi}{x} + e^3$ je:
   A. $\pi x + 3e^2$ **B.** $\dfrac{\pi}{x^2} + 3e^2$ **C.** $-\dfrac{\pi}{x^2}$ **D.** $-\dfrac{\pi}{x^2} + 3e^2$

2. Derivacija funkcije $f(x) = (x-2)^2 \cdot \sqrt{2x+1}$ je:
   A. $2(x-2)\sqrt{2x+1}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{5x(x-2)}{\sqrt{2x+1}}$ **D.** $\dfrac{2(x-2)}{2\sqrt{2x+1}}$

3. Derivacija funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}$ je:
   A. $\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ **B.** $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ **C.** $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin x}$ **D.** $\dfrac{\cos x + 1}{\cos^2 x}$

4. Derivacija funkcije $f(x) = e^{-x^2+2}$ je:
   A. e^{-x^2+2} **B.** e^{-2x} **C.** $-2xe^{-x^2+2}$ **D.** $(-x^2+2)e^{-x^2+2}$

5. Za funkcije $f(x) = x^2 + 1$, $g(x)$, $h(x) = f(x)g(x)$ vrijedi $h'(1) = 4$ i $g'(1) = -2$. Kolika je vrijednost $g(1)$?
   A. 2 **B.** 4 **C.** -4 **D.** nepoznata

6. Jednadžba tangente na krivulju $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ u točki s apscisom $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ glasi:
   A. $2x + 4y - 4 - \pi = 0$ **B.** $y - 1 = 0$
   C. $x + 2y - \pi - 1 = 0$ **D.** $2x - 4y + 4 - \pi = 0$

7. U kojim točkama na krivulji $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ tangenta na krivulju zatvara s osi Ox kut od $135°$?
   A. $(-2,0);(4,3)$ **B.** $(0,-1);(1,-3)$ **C.** $(1,-3);(3,5)$ **D.** $(0,-1);(4,3)$

8. U kojoj je točki na grafu funkcije $f(x) = x^2 - x + 4$ tangenta okomita na pravac $x + 3y + 1 = 0$?
   A. (1.4) **B.** $(2,6)$ **C.** (-2.10) **D.** $(0,4)$

9. Kolika je udaljenost od ishodišta do tangente na graf funkcije $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ povučene u točki na grafu s ordinatom 2?
   A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$

Ispit 3

1. Derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n}$ je:

   A. $\frac{1}{n+1}x^n$ **B.** x^n **C.** $\frac{1}{n+1}x^n + \frac{1}{n^2}$ **D.** $x^n + \frac{1}{n^2}$

2. Derivacija funkcije $f(x) = x\sin x\cos x$ je:

   A. $\sin x\cos x + x\cos^2 x$ **B.** $\sin x\cos x(1-x)$
   C. $x(\cos^2 x - \sin^2 x)$ **D.** $\sin x\cos x + x\cos 2x$

3. Derivacija funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ je:

   A. $\frac{\cos^2 x - 2\sin x}{\cos^3 x}$ **B.** $-\frac{1}{2\sin x}$ **C.** $\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$ **D.** $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos^4 x}$

4. Derivacija fnkcije $f(x) = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ u točki $x_0 = 1$ iznosi:

   A. 0 **B.** $-\frac{1}{36}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** 1

5. Jednadžba tangente na graf funkcije $y = e^x \ln(x+1)$ u točki s apscisom $x_0 = 0$ glasi:

   A. $x - y + 1 = 0$ **B.** $y - 1 = 0$ **C.** $y - x = 0$ **D.** $x - y - 1 = 0$

6. Koliki kut zatvara pravac $y = -x + 2$ s krivuljom $y = \sqrt{x}$ u točki u kojoj siječe tu krivulju?

   A. 45° **B.** 135° **C.** 71°34′ **D.** 19°26′

7. Jednadžba tangente na krivulju $y = x(x-1)(x+1)$ koja je paralelna s tangentom povučenom u točki $(-1, 0)$ glasi:

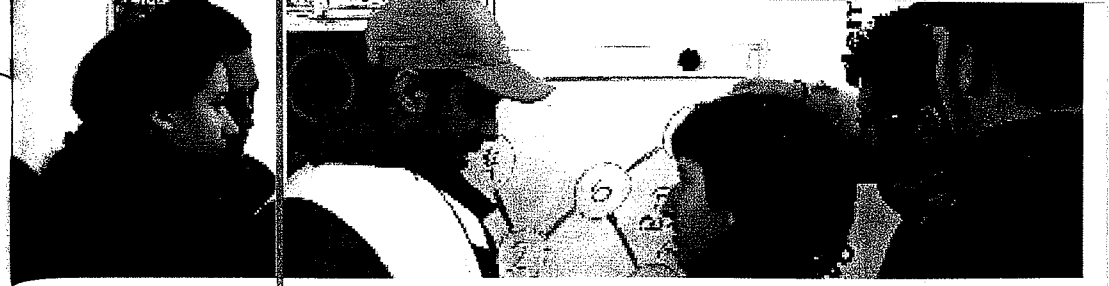
   A. $2x - y + 2 = 0$ **B.** $2x + y + 2 = 0$ **C.** $2x + y - 2 = 0$ **D.** $2x - y - 2 = 0$

8. Tangenta na krivulju $y = a\sqrt{1+bx}$ u točki s apscisom $x = -4$ glasi $x+y-5 = 0$. Konstanta a iznosi

   A. -2 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 1

9. Tangenta na graf funkcije $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ i normala na graf funkcije $g(x) = \ln(2x) + 1$ povučene u točkama s istom apscisom su paralelne. Kolika je ta apscisa?

   A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 4



24. lekcija

Primjene diferencijalnog računa

24. lekcija Ponovimo

Rast i pad funkcije

Kažemo da funkcija f :

— **strogo raste** na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

— **raste (neopadajuća je)** na tom intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi:

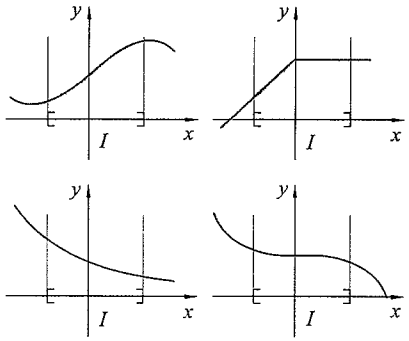
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

— **strogo pada** na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

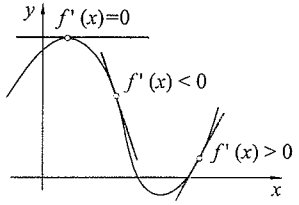
— **pada (nerastuća je)** na tom intervalu ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2).$$



Interval $\langle a, b\rangle$ na kojem funkcija bilo raste bilo pada nazivamo **intervalom monotonosti** funkcije f .

Ako je funkcija f diferencijabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$, ona **raste** na tom intervalu onda i samo onda ako je $f'(x) \geqslant 0$ u svakoj točki x tog intervala. Funkcija f **pada** na intervalu $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \leqslant 0$ u svakoj točki x tog intervala.



Stacionarne točke

Točke u kojima je vrijednost derivacije jednaka nuli, te je tangenta paralelna s x-osi, nazivamo **stacionarnim točkama**. Stacionarna točka može biti minimum ili maksimum funkcije ili točka horizontalnog pregiba.

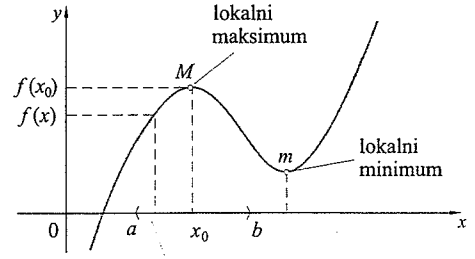
Postupak računanja stacionarnih točaka:

1. Izračunamo derivaciju f'.
2. Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Njezina su rješenja **stacionarne točke**.
3. Stacionarnim točkama područje definicije podijeljeno je na **intervale monotonosti**. Provjerom predznaka derivacije određujemo jesu li oni intervali rasta ili intervali pada funkcije.

Lokalni minimum i maksimum funkcije

Kažemo da je točka x_0 **lokalni minimum** funkcije f , ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži točku x_0 , tako da vrijedi:

$$f(x_0) < f(x), \quad \text{za svaki } x \in \langle a, b\rangle \ , \ x \neq x_0 .$$



okolina točke x

Kažemo da je točka x_0 **lokalni maksimum** funkcije f , ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži točku x_0 , tako da vrijedi:

$$f(x_0) > f(x), \quad \text{za svaki } x \in \langle a, b\rangle \ , \ x \neq x_0 .$$

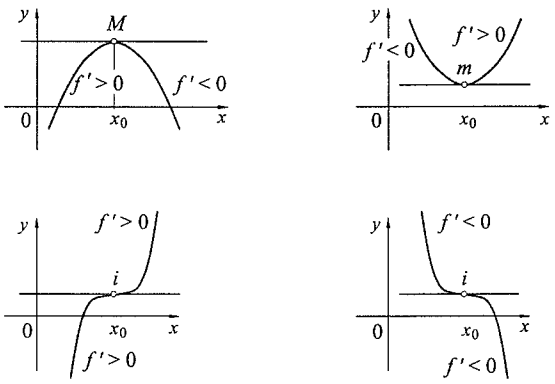
Minimum i maksimum jednom riječju zovemo **ekstremima** funkcije f .

Nužan uvjet za lokalni ekstrem: Ako funkcija u točki ekstrema ima derivaciju, ta derivacija mora biti jednaka nuli.

Postupak računanja lokalnih ekstrema

1. Odredimo stacionarne točke funkcije f .
2. Odredimo intervale monotonosti.
3. Ako je x_0 stacionarna točka, tad se njezin karakter utvrđuje na temelju rasta ili pada funkcije lijevo i desno od te točke, a oni su dani predznacima derivacije.

Sljedeća slika objašnjava sve moguće situacije.



	lijevo od x_0	desno od x_0	karakter točke
derivacija	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	maksimum
derivacija	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	minimum
derivacija	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	horizontalni pregib
derivacija	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	horizontalni pregib

Globalni ekstrem je maksimum ili minimum funkcije na cijelom intervalu $[a, b]$.

Nužan uvjet za globalni ekstrem: Na intervalu $[a, b]$ funkcija može poprimiti ekstrem u točki x_0 ako je:

— x_0 stacionarna točka, $f'(x_0) = 0$,

— derivacija u x_0 ne postoji (točke prekida ili loma),

— x_0 je kraj intervala.

Ispitivanje karaktera ekstrema s pomoću druge derivacije:

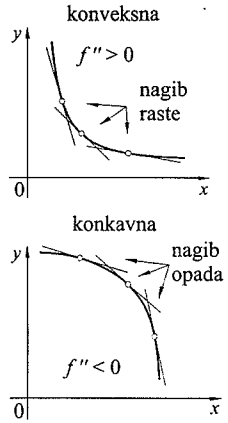
1. Izračunamo derivacije f' i f''.
2. Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Njezina su rješenja stacionarne točke.

3a. Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je x_0 **minimum**.

3b. Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je x_0 **maksimum**.

3c. Ako je $f''(x_0) = 0$, onda karakter točke x_0 istražujemo s pomoću predznaka prve derivacije u intervalu lijevo i desno oko točke x_0.

Konveksnost i konkavnost funkcije

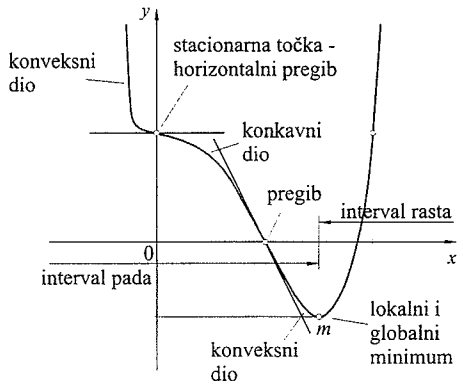


Neka na nekom intervalu $\langle a, b\rangle$ vrijedi $f''(x) > 0$. To znači da na tom intervalu prva derivacija raste, tj. raste nagib tangente, odnosno raste kut što ga ona zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Za funkciju f kažemo da je **konveksna** na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Slično vrijedi za slučaj $f''(x) < 0$. Tad prva derivacija opada, tj. opada nagib tangente i kut što ga ona zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Za ovakvu funkciju kažemo da je **konkavna** na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Ako je na intervalima (a, b), (b, c) druga derivacija različitih predznaka, onda u točki b ona prelazi iz konveksne u konkavnu granu ili obratno. Točku b nazivamo **točkom pregiba (infleksije)** funkcije f.

Graf konveksne funkcije leži iznad tangente povučene u po volji odabranoj točki intervala. Graf konkavne funkcije leži ispod tangente povučene u po volji odabranoj točki intervala.



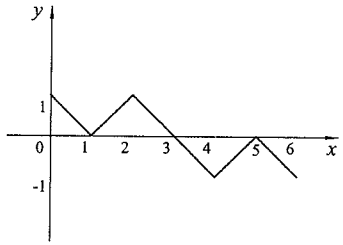
Postupak nalaženja intervala konveksnosti, konkavnosti i točaka pregiba:

1. Izračunamo f''.
2. Riješimo jednadžbu $f''(x) = 0$. Njezina su rješenja moguće pregibne točke.
3. Na onim intervalima na kojima je $f''(x) > 0$ funkcija je konveksna, na ostalima je konkavna. Na granici između intervala konveksnosti i konkavnosti nalazi se pregibna točka.

24. lekcija Primjeri

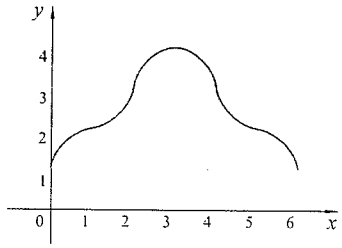
Primjer 1.

Na slici je nacrtan graf derivacije f' funkcije f. Opišimo ponašanje funkcije f. U kojim točkama ona poprima ekstrem?



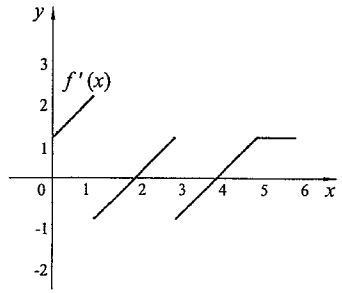
Rješenje. Na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ derivacija je pozitivna (osim u $x = 1$ gdje je jednaka nuli) pa funkcija raste na tom intervalu. U točki $x = 1$ derivacija je jednaka nuli, ali funkcija nema ekstrem jer raste lijevo i desno od te točke. To je točka horizontalnog pregiba. Na intervalu $\langle 3, 6\rangle$ derivacija je negativna (osim u točki $x = 5$ gdje je jednaka nuli) pa funkcija pada na tom intervalu. Ona ima ekstrem u točki $x = 3$. Lijevo od te točke funkcija raste, a desno pada, pa je riječ o maksimumu. U točki $x = 5$ funkcija nema ekstrem, nego horizontalni pregib.

Graf funkcije sastavljen je od dijelova parabola i izgleda poput ovog na slici (vertikalni pomak funkcije nije određen).



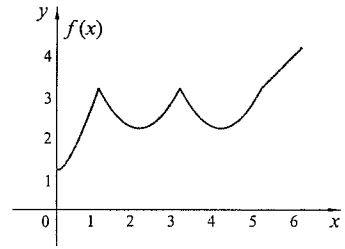
Primjer 2.

Na slici je nacrtan graf derivacije f' funkcije f. Opišimo ponašanje funkcije f. U kojim točkama ona poprima ekstrem? U kojoj točki funkcija poprima globalni maksimum?



Rješenje. Na intervalu $[0, 1]$ derivacija je pozitivna, stoga funkcija raste. U točki $x = 1$ derivacija ima prekid. Desno od te točke vrijednosti derivacije su negativne, pa funkcija u točki $x = 1$ ima šiljak, desno od te točke ona pada. U točki $x = 2$ nalazi se lokalni minimum funkcije.

Funkcija pada na intervalu $[1, 2]$, a raste na $[2, 3]$. U točki $x = 3$ ima ponovno šiljak, a zatim se situacija ponavlja na intervalu $[3, 5]$. U točki $x = 4$ opet je lokalni minimum. Na intervalu $[4, 6]$ ona opet raste i poprima globalni maksimum u točki $x = 6$. Njezin graf izgleda kao na sljedećoj slici, uz napomenu da vertikalni pomak funkcije nije određen.



Primjer 3.

Odredimo intervale monotonosti i ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x.$$

Nacrtajmo graf funkcije.

Rješenje. Derivacija funkcije je

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Ona je jednaka nuli u točkama $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. To su **stacionarne točke** ove funkcije. Područje definicije podijeljeno je tim točkama na **intervale monotonosti**:

$$\langle -\infty, 1\rangle, \qquad \langle 1, 3\rangle, \qquad \langle 3, +\infty\rangle.$$

Na ovim intervalima derivacija ima stalan znak. Uzmemo li npr. $x = 0$, onda iz $f'(0) = 3$ zaključujemo da je na intervalu $\langle -\infty, 1\rangle$ prva derivacija pozitivna. Budući da je ta derivacija kvadratna funkcija, na drugom će intervalu ona biti negativna, a na trećem opet pozitivna. Tako dobivamo intervale monotonosti:

interval	$f'(x)$	ponašanje funkcije
$\langle -\infty, 1\rangle$	>0	raste
$\langle 1, 3\rangle$	<0	pada
$\langle 3, +\infty\rangle$	>0	raste

Lijevo od točke $x_1 = 1$ funkcija raste, a desno pada. Zato je x_1 točka **lokalnog maksimuma**, $M\left(1, \frac{4}{3}\right)$.

Lijevo od točke $x_2 = 3$ funkcija pada, a desno raste. Zato je x_2 točka **lokalnog minimuma**, $m(3, 0)$.

Druga derivacija funkcije glasi $f''(x) = 2x^2 - 4x$. Karakter stacionarnih točaka možemo ispitati i s pomoću druge derivacije:

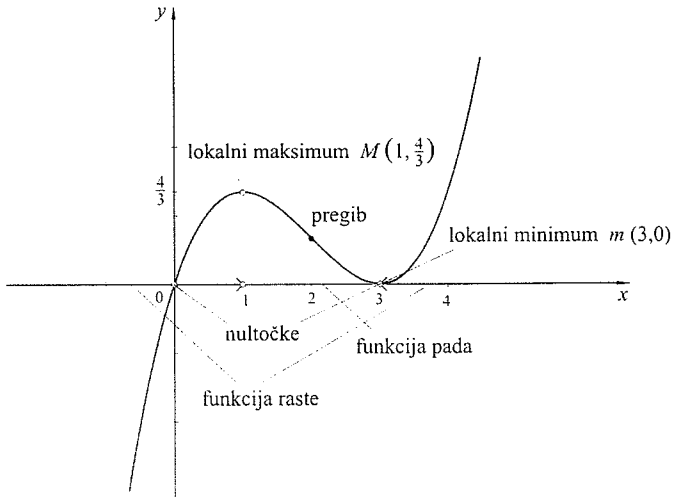
stacionarna točka	$f''(x)$	vrsta
$x_1 = 1$	<0	maksimum
$x_2 = 3$	>0	minimum

Druga derivacija jednaka je nuli u točki $x_i = 2$. Vrijednost je funkcije u toj točki $f(2) = \frac{2}{3}$. Onda je $I\left(2, \frac{2}{3}\right)$ točka pregiba.

Nultočke funkcije vide se iz sljedećeg prikaza:

$$f(x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 6x + 9) = \frac{1}{3}x(x-3)^2.$$

Odavde slijedi $x = 0$ ili $x = 3$. Vidimo da je točka minimuma ujedno i nultočka funkcije. Graf funkcije možemo nacrtati na temelju ovih podataka:



Primjer 4.

Odredimo nultočke, intervale monotonosti i ekstreme funkcije

$$f(x) = (x^3 - x^2)e^x.$$

Nacrtajmo njezin graf.

Rješenje. Nultočke funkcije čitamo iz prikaza:

$$f(x) = x^2(x-1)e^x.$$

Nultočka $x = 0$ je *dvostruka*, graf funkcije će *dirati* os apscisa u toj točki. Nultočka $x = 1$ je *jednostruka*, graf funkcije će sjeći os apscisa u toj točki.

Derivacija funkcije je:

$$f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 2x)e^x.$$

Pronađimo stacionarne točke, tj. riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Kako je za svaki x funkcije e^x pozitivna, mora vrijediti:

$$x^3 + 2x^2 - 2x = x(x^2 + 2x - 2) = 0$$

i odavde dobivamo stacionarne točke:

$$x_1 = -1 - \sqrt{3}, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

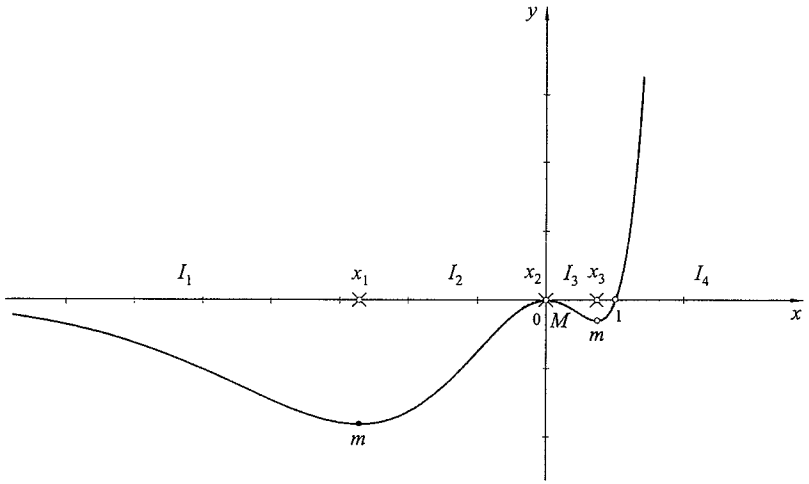
Tim točkama područje definicije podijeljeno je na intervale monotonosti:

$$I_1 = \left\langle -\infty, -1 - \sqrt{3}\right\rangle, \quad I_2 = \left\langle -1 - \sqrt{3}, 0\right\rangle,$$
$$I_3 = \left\langle 0, -1 + \sqrt{3}\right\rangle, \quad I_4 = \left\langle -1 + \sqrt{3}, \infty\right\rangle.$$

Jesu li to intervali rasta ili pada, određujemo na temelju predznaka prve derivacije na tim intervalima. Dovoljno je uzeti bilo koju točku unutar intervala i utvrditi predznak prve derivacije. Primjerice, za interval I_1 uzmimo $x = -3$, $f'(-3) = -3e^{-3} < 0$.

interval	$f'(x)$	ponašanje funkcije
I_1	<0	pada
I_2	>0	raste
I_3	<0	pada
I_4	>0	raste

Na temelju ove tablice vidimo da funkcija ima dva lokalna minimuma, u točkama $x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3} - 1$, a lokalni maksimum u točki $x_2 = 0$.



Primjer 5.

Odredimo ekstreme i područje konveksnosti i konkavnosti za funkciju

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x-1}.$$

Rješenje. Najprije odredimo prvu i drugu derivaciju zadane funkcije:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}},$$

Potražimo točke pregiba rješavajući jednadžbu $f''(x) = 0$. Jednadžba

$$f''(x) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{5}{3}}} = 0$$

nema rješenja, ali za $x = 1$ vrijednost $f''(1)$ ne postoji. Promotrimo intervale $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle 1, \infty\rangle$.

Na intervalu $\langle -\infty, 1\rangle$ je $f''(x) < 0$, što znači da je funkcija na tom intervalu konkavna.

Na intervalu $\langle 1, \infty\rangle$ je $f''(x) > 0$, što znači da je funkcija na tom intervalu konveksna.

Točka $x = 1$ je pregibna točka.

Odredimo sad stacionarne točke.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$(x-1)^{-\frac{2}{3}} = 3$$

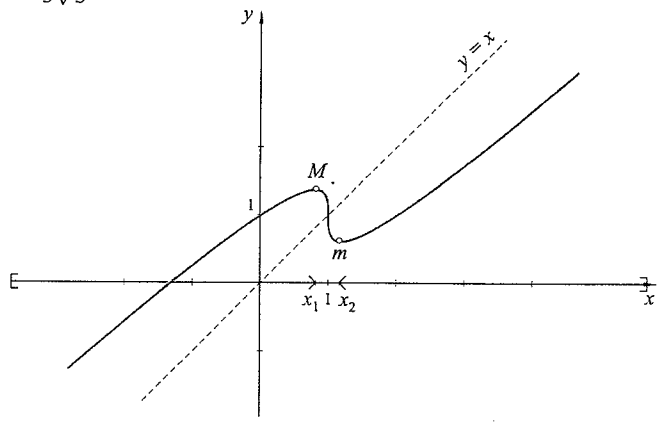
$$(x-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{27}$$

$$x = 1 \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Budući da je na intervalu $\langle -\infty, 1\rangle$ funkcija konkavna (druga derivacija je negativna), u točki $x_1 = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ funkcija poprima lokalni maksimum.

Na intervalu $\langle 1, \infty\rangle$ funkcija je konveksna (druga derivacija je pozitivna), te u točki $x_2 = 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$ funkcija poprima lokalni minimum.



Primjer 6.

U skupu pravokutnih trokuta s hipotenuzom $\sqrt{2}$ cm odredimo trokut s najvećim opsegom.

Rješenje. Najprije iskoristimo Pitagorin poučak:

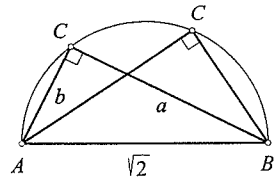
$$a^2 + b^2 = (\sqrt{2})^2 \implies a = \sqrt{2 - b^2}.$$

Uvrstimo dobiveno u formulu za opseg trokuta:

$$O = \sqrt{2 - b^2} + b + \sqrt{2}.$$

Možemo primjetiti da je opseg funkcija od b. Odredimo maksimum ove funkcije koristeći diferencijalni račun.

Izjednačimo li prvu derivaciju $O'(b) = \dfrac{-b}{(2-b^2)^{\frac{1}{2}}} + 1$ s 0, dobivamo $b = 1$, a onda iz $a^2 + b^2 = 2$ slijedi $a = 1$.



Zanima nas je li stacionarna točka $b = 1$ točka maksimuma funkcije $O(b)$. Izračunamo li drugu derivaciju, dobivamo:

$$O''(b) = -\frac{2}{2-b^2} \implies O''(1) < 0.$$

Zaključujemo da pravokutni trokut s hipotenuzom $c = \sqrt{2}$ cm ima najveći opseg ako su mu katete $a = 1$ cm i $b = 1$ cm, odnosno, ako je jednakokračan.

Primjer 7.

Koji od valjaka obujma 1000 cm^3 ima najmanje oplošje?

Rješenje. Iz $V = r^2\pi v$ imamo $v = \dfrac{1000}{r^2\pi}$.

Odredimo sada oplošje kao funkciju polumjera r, uvrstivši u formulu za oplošje dobiveni izraz za visinu v:

$$P = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}.$$

Želimo odrediti stacionarnu točku te funkcije, stoga rješimo jednadžbu $P' = 0$. Rješenje je:

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \implies v = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Uvrstimo li u drugu derivaciju $P'' = 4r\pi - \dfrac{2000}{r^2}$ dobivenu stacionarnu točku $r = \dfrac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$, dobit ćemo $P'' > 0$. Zaključujemo da je valjak polumjera osnovice $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ i visine $\dfrac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$ valjak volumena 1000 cm^3 i najmanjeg mogućeg oplošja.

U ovom valjku visina je jednaka promjeru baze.

Primjer 8.

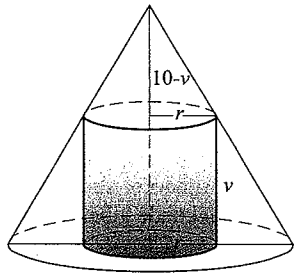
Stošcu s polumjerom osnovice 6 cm i visinom 10 cm upisan je valjak kojem baza leži na osnovici stošca. Koji od svih takvih valjaka ima najveći obujam?

Rješenje. Razmotrimo osni presjek stošca i upisanog valjka. Iz jednakosti:

$$(10 - v) : r = 10 : 6$$

dobijemo $v = 10 - \dfrac{5}{3}r$. Tako je onda:

$$V_{\text{valjak}} = -\frac{5}{3}r^3\pi + 10\pi r^2.$$



Primjećujemo da je V_{valjak} funkcija od r, pa iz uvjeta $V'_{\text{valjak}} = 0$ slijedi:

$$r = 4 \implies v = \frac{10}{3}.$$

Uvrstimo li $r = 4$ u drugu derivaciju $V''_{\text{valjak}} = -5r^2\pi + 20\pi r$, zaključujemo da je druga derivacija manja od nule, odnosno valjak s polumjerom 4 cm i visinom $v = \dfrac{10}{3}$ cm je valjak s najvećim mogućim obujmom koji možemo upisati u zadani stožac.

Primjer 9.

Čestica se giba po pravcu. Njezin položaj u odnosu na ishodište opisan je funkcijom $s(t) = t^3 - 12t + 2$ cm, gdje je t vrijeme u sekundama, $t \geqslant 0$.

1) Odredimo brzinu i akceleraciju čestice u bilo kojem trenutku t.

2) Opišimo položaj i brzinu čestice u početku gibanja.

3) Opišimo gibanje čestice u trenutku $t = 2$ s.

4) Opišimo gibanje čestice u trenutku $t = 3$ s.

5) U kojim trenucima se brzina čestice povećava?

6) Kolika je najveća udaljenost od ishodišta u vremenu $0 \leqslant t \leqslant 3$ s?

7) Koliki je ukupni prevaljeni put u tom vremenskom intervalu?

Rješenje. **1)** Brzina $v(t)$ dobiva se iz položaja deriviranjem:

$$v(t) = 3t^2 - 12 \text{ cm/s}.$$

Ova brzina ima *iznos* i *predznak*. Iznos brzine je:

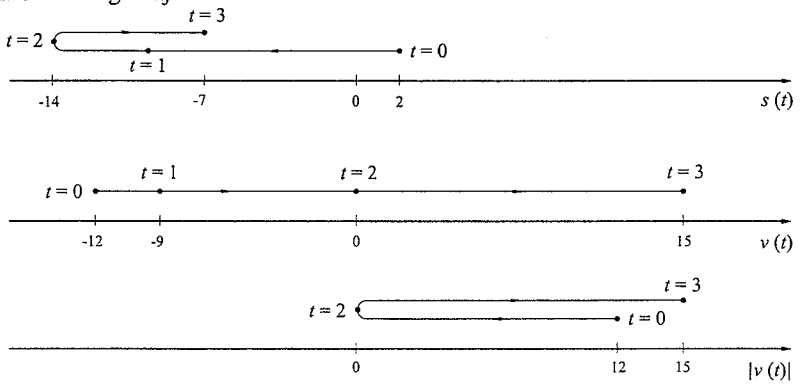
$$|v(t)| = |3t^2 - 12| \text{ cm/s}.$$

Ako je predznak od $v(t)$ pozitivan, čestica se *kreće udesno* po brojevnom pravcu. Ako je predznak negativan, ona se kreće *ulijevo*.

Akceleracija je derivacija brzine:

$$a(t) = 6t \text{ cm/s}^2.$$

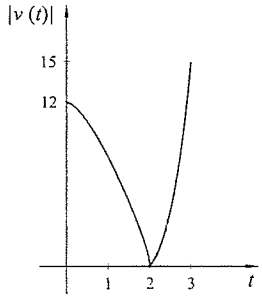
Na sljedećoj slici skicirana su ponašanja funkcija $s(t)$, $v(t)$ i $|v(t)|$ za vrijeme prve tri sekunde gibanja.



2) U trenutku $t = 0$ položaj čestice je $s(0) = 2$ cm, a brzina $v(0) = -12$ cm/s. Negativan predznak brzine znači da se čestica u tom trenutku kreće ulijevo, prema ishodištu.

3) U trenutku $t = 2$ položaj čestice je $s(2) = -14$ cm, a brzina $v(2) = 0$. Čestica se na trenutak zaustavila 14 cm lijevo od ishodišta.

4) U trenutku $t = 3$ položaj čestice je $s(3) = -7$ cm, njezina brzina $v(3) = 15$ cm/s. Čestica se približava ishodištu.

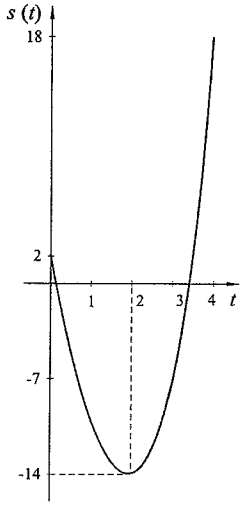


5) Brzina se povećava tamo gdje $|v(t)|$ raste.

$$|v(t)| = \begin{cases} 12 - 3t^2 \text{ cm/s}, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 3t^2 - 12 \text{ cm/s}, & 2 \leqslant t. \end{cases}$$

Vidimo da ova funkcija raste za $t \geqslant 2$.

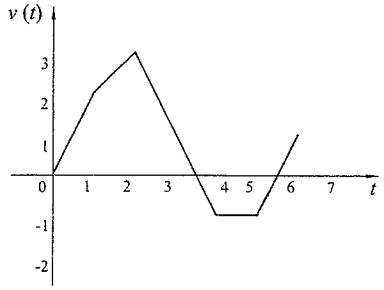
6) Najveću udaljenost dobit ćemo iz uvjeta $s'(t) = 0$, tj. $v(t) = 0$, odakle je $t = -2$ ili $t = 2$. Vrijeme gledamo samo za $t \geqslant 0$, pa nas zanima samo $t = 2$. U tom je trenutku $s(2) = -14$ cm. Najveća se udaljenost postiže ili u toj točki, ili na krajevima promatranog intervala. Kako je $s(0) = 2$, $s(2) = -7$, zaključujemo da se najveća udaljenost u vremenu $0 \leqslant t \leqslant 3$ s postiže u trenutku $t = 2$ s i iznosi 14 cm.



7) Ukupni prevaljeni put u tom intervalu je $2 + 14 + 7 = 23$ cm.

Primjer 10.

Na slici je dan graf brzine $v(t)$ čestice koja se giba po pravcu.



1) U kojem trenutku čestica ima najveću brzinu?
2) Na kojem intervalu čestica ima najveće ubrzanje?
3) Na kojem se intervalu gibanje čestice usporava?

Rješenje.

1) Najveća je brzina u trenutku $t = 2$.

2) Na intervalima $[1, 2]$ i $[5, 6]$.

3) Na intervalima $[2, 3.5]$, te $[5, 5.5]$.

24. lekcija Zadaci

1. Sljedeće funkcije definirane su na intervalu $[-2, 2]$. Odredite interval rasta za svaku od njih:

1) $f(x) = |x + 1|$;

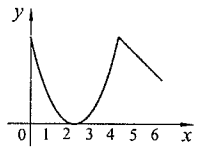
2) $f(x) = |x| - 1$;

3) $f(x) = \begin{cases} x - 2, & -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ -x, & -1 \leqslant x \leqslant 2; \end{cases}$

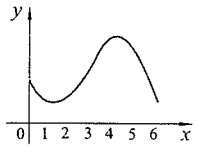
4) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

2. Koja od funkcija sa sljedećih slika raste samo na intervalu $[2, 4]$?

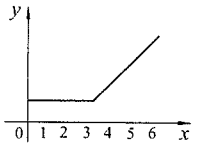
1)



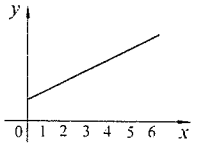
2)



3)



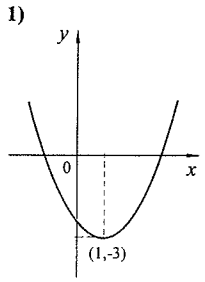
4)



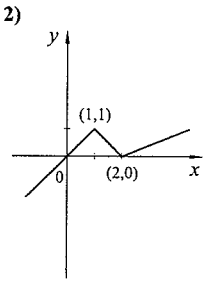
3. Odredi lokalne i globalne maksimume na intervalu $[1, 6]$ za funkcije s prethodne slike.

4. Odredi intervale rasta i intervale pada za funkcije sa sljedeće slike.

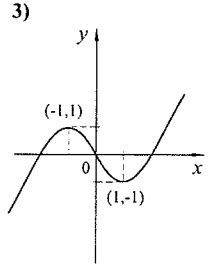
1)



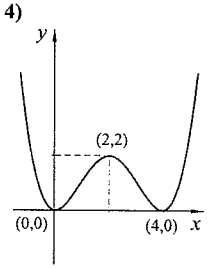
2)



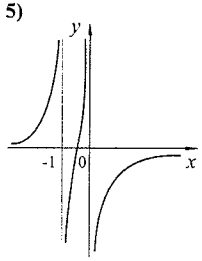
3)



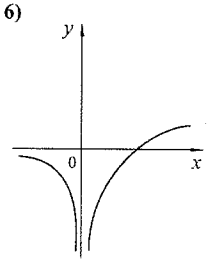
4)



5)



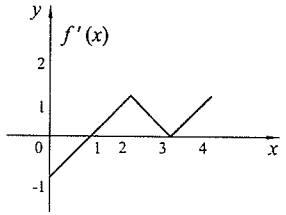
6)



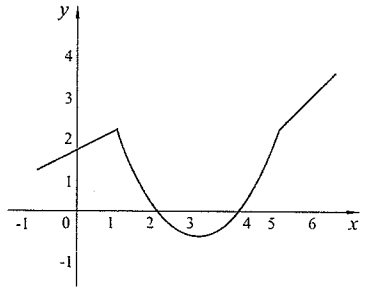
5. Odredi sve lokalne ekstreme za funkcije sa prethodne slike.

Koje funkcije imaju točke pregiba i koliki je broj tih točaka?

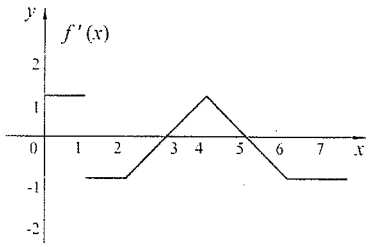
6. Na slici je nacrtan graf derivacije f' funkcije f. Kakvo je ponašanje funkcije f u točkama $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$? U kojim točkama ta funkcija poprima ekstrem?



7. Na slici je nacrtan graf derivacije f' funkcije f. U kojoj točki funkcija f poprima lokalni minimum?



8. Na slici je nacrtan graf derivacije f' funkcije f. Opišite ponašanje funkcije f. Nacrtajte njezin graf ako vrijedi $f(0) = 0$.



9. Odredite interval rasta funkcije:

1) $f(x) = x^2 - x$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$;

3) $f(x) = -x^3 + 3x$;

4) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2 - x}$.

10. Odredite interval pada funkcije:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;

2) $f(x) = -2x^3 + 6x$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

11. Odredite intervale rasta funkcije:

1) $f(x) = 2^x + 4^{-x}$;

2) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \cos x$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \sin x$;

4) $f(x) = \dfrac{x}{(x + 1)^2}$.

12. Odredite maksimum funkcije i točku u kojoj se postiže.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$;

2) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + x^3$;

3) $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$.

13. Odredite minimum funkcije i točku u kojoj se postiže.

1) $f(x) = x^4 - 8x^2$;

2) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

14. Odredite ekstreme funkcije:

1) $f(x) = x - \sqrt{x}$;

2) $f(x) = x \ln x$;

3) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$.

15. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije na intervalu.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2$, na $[-1, 3]$;

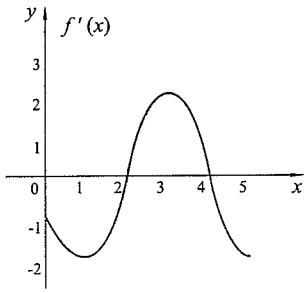
2) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, na $[0, 3]$;

3) $f(x) = x^4 - 4x^2$, na $[-1, 3]$.

16. Odredite karakteristične točke i nacrtajte graf funkcije:
1) $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$;
2) $f(x) = (x-1)^2(x+3)$;
3) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

17. Funkcija $f(x) = x^3 + ax + b$ ima stacionarnu točku u $(1, -2)$. Odredite parametre a i b.

18. Na slici je nacrtan graf funkcije f'.

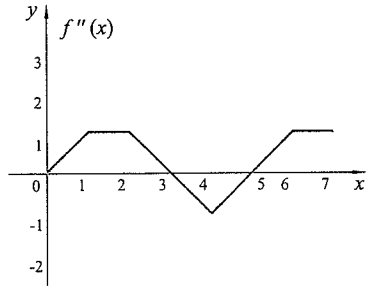


1) Ako točka $(3, 1)$ leži na grafu funkcije f, kako glasi jednadžba tangente na graf funkcije u toj točki?
2) U kojim točkama f poprima lokalni minimum?
3) U kojim točkama f poprima lokalni maksimum?
4) Koliko točaka pregiba ima graf te funkcije na intervalu $[0, 5]$?
5) Na kojem je intervalu funkcija f konveksna?

19. Odredite maksimum funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ na intervalu $[-1, 4]$.

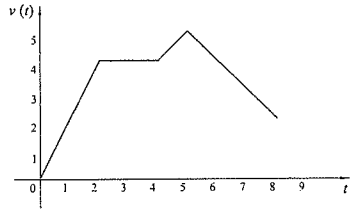
20. Zadana je funkcija $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$. Točno jedna od sljedećih tvrdnji nije istinita. Koja?
1) Nultočke funkcije su -1 i 1.
2) Vrijedi $f'(-1) = -4$, $f'(1) = 0$.
3) Maksimum funkcije je $(1, 0)$.
4) Minimum funkcije je $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right)$.
5) Točka pregiba je $\left(\frac{1}{3}, -\frac{18}{27}\right)$

21. Na slici je nacrtan graf funkcije $f''(x)$.



Na temelju slike odgovorite na sljedeća pitanja:
1) Na kojim je intervalima f' rastuća?
2) Na kojim je intervalima f konveksna?

22. Na slici je nacrtan graf brzine $v(t)$ čestice koja se giba po pravcu.



1) Na kojem je intervalu ubrzanje jednako nuli?
2) Na kojem je intervalu ubrzanje najveće?
3) Na kojem intervalu čestica usporava?

23. Položaj čestice koja se giba po pravcu je:

$$s(t) = t^2 - 4t + 6 \text{ cm}, \qquad t \geqslant 0.$$

1) Odredi brzinu i ubrzanje čestice.
2) Opiši kretanje čestice u početnom trenutku.
3) U kojem je trenutku čestica najbliža ishodištu i kolika je ta udaljenost?
4) Opiši kretanje čestice u trenutku $t = 2$ s.
5) U kojim se trenucima iznos brzine čestice smanjuje?

24. Kamen je bačen okomito uvis i njegov položaj (udaljenost do tla) u trenutku t opisan je formulom:

$$s(t) = 2 + 30t - 4.9t^2 \text{ m}, \qquad t \geqslant 0.$$

1) Odredite formulu za brzinu i ubrzanje kamena.
2) Opišite početni položaj i početnu brzinu kamena.
3) Opišite kretanje kamena u trenucima $t = 2$ s i $t = 4$ s.
4) Odredite maksimalnu visinu na koju je kamen stigao.
5) Odredite vrijeme potrebno da kamen padne na tlo.

25. Od metalnog lima u obliku pravokutnika dimenzija 25cm × 40 cm trebaju se odrezati četiri kvadrata u vrhovima pravokutnika i dobiveni lim saviti u limenu kutiju (bez poklopca). Kolika veličina kvadrata treba biti ako želimo dobiti kutiju maksimalnog obujma?

26. Pravokutni trokut ima hipotenuzu duljine 12 cm i kut od 60°. Odredite veću stranicu pravokutnika najveće površine koji je upisan u taj trokut tako da mu jedna stranica leži na hipotenuzi.

27. Pravokutni trokut ima hipotenuzu duljine 12 cm i kut od 60°. Odredite veću stranicu pravokutnika najveće površine koji je upisan u taj trokut tako da mu jedan vrh leži u vrhu s pravim kutom trokuta.

28. U kuglu je upisan valjak najvećeg obujma. Odredite polumjer baze valjka ako je polumjer kugle $R = 6$ cm.

29. Površina paralelograma iznosi 8 cm^2. Koliki je najmanji mogući opseg tog paralelograma?

30. Površina pravokutnika iznosi 8 cm^2. Koliki je najmanji mogući zbroj duljina triju stranica tog pravokutnika?

31. Rastavite broj 12 na zbroj dvaju realnih brojeva tako da:
1) zbroj kuba prvog i kvadrata drugog bude što je moguće manji;
2) zbroj prvog i kvadrata drugog bude što je moguće manji.

32. Broj 30 rastavite na dva dijela tako da umnožak prvog s kvadratom drugog bude maksimalan.

33. Ako je $f(x) = \frac{x}{2-x} + 2$, odredite sva rješenja jednadžbe $f(x) = f'(x)$.

34. U kojoj točki intervala $[-1, 2]$ tangenta na krivulju $y = -\frac{1}{3}x^3 + x + 1$ ima najmanji nagib?

35. Reklamni poster treba imati površinu 2 m^2. Lijeva i desna margina iznose 1 dm, donja i gornja 1.5 dm. Kakve dimenzije papira treba odabrati da bi površina sa slikom bila maksimalna?

36. Kanta oblika valjka treba sadržavati 64 litre. Odredi njezine dimenzije tako da njezino oplošje bude minimalno ako se
1) kanta radi bez poklopca;
2) kanta radi s poklopcem.

37. Zbroj dvaju realnih brojeva je 10. Odredite brojeve uz uvjet da:
1) njihov umnožak bude maksimalan;
2) zbroj njihovih kvadrata bude minimalan;
3) umnožak kvadrata jednog i kuba drugog bude maksimalan.

38. Umnožak dvaju realnih brojeva je 8. Odredite brojeve tako da:
1) njihov zbroj bude minimalan;
2) zbroj prvog i kvadrata drugog broja bude minimalan.

24. lekcija Ispiti

Ispit 1

1. Na kojem je od sljedećih intervala funkcija $f(x) = e^{\sin x}$ rastuća?

   A. $[0, \infty\rangle$ **B.** $[0, 2\pi]$ **C.** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **D.** $[0, \pi]$

2. Najveća vrijednost funkcije $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$ na intervalu $[-1, 1]$ je:

   A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** ne postoji

3. Funkcija $f(x) = x^2 e^{-x}$ ima ekstreme u sljedećim točkama (x_M točka maksimuma i x_m točka minimuma):

   A. $x_m = 0, x_M = 2$ **B.** samo $x_m = 0$ **C.** nema ekstrema **D.** samo $x_M = 0$

4. Najveća i najmanja vrijednost funkcije $f(x) = (x+1)^2(x-2)$ na odresku $[0, 2]$ je:

   A. $m = -4,\ M = 1$ **B.** $m = -2,\ M = 0$
   C. $m = -4,\ M = 0$ **D.** $m = 0,\ M = 1$

5. Od svih stožaca s izvodnicom duljine 3 cm, onaj s najvećim volumenom ima visinu:

   A. $\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{6}$ **D.** 3

6. Umnožak dvaju realnih pozitivnih brojeva jednak je 12. Koliki je najmanji mogući zbroj tih brojeva?

   A. 8 **B.** 7 **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** 6

7. Tijelo se giba po pravcu po zakonu $x(t) = t^2 + 3t + 1$. Koliki je prijeđeni put od trenutka $t = 0$ do trenutka kad brzina tijela dostigne iznos $v = 11$?

   A. 29 **B.** 28 **C.** 12 **D.** 4

8. Najveća i najmanja vrijednost funkcije $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ na odresku $[-3, -1]$ je:

   A. $m = -\frac{3}{2},\ M = -2.$ **B.** $m = -\frac{5}{2},\ M = -2.$
   C. $m = -\frac{3}{2},\ M = 2.$ **D.** $m = -\frac{3}{2},\ M = -1.$

9. Maksimum funkcije $f(x) = (x-2)^2(x+1)$ postiže se u točki:

   A. 2 **B.** 0 **C.** -2 **D.** 4

Ispit 2

1. Na kojem dijelu intervala $[0, 2\pi]$ je funkcija $f(x) = x + 2\sin x$ padajuća?

   A. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ **B.** $[\pi, 2\pi]$ **C.** $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ **D.** nigdje

2. Najveća i najmanja vrijednost funkcije $f(x) = 1 + 12x - x^3$ na odresku $[-3, 1]$ su:

   A. $m = -15,\ M = 14$ **B.** $m = -8,\ M = 14$
   C. $m = -8,\ M = 12$ **D.** $m = -15,\ M = 12$

3. Funkcija $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$ ima ekstreme u sljedećim točkama (x_M točka maksimuma i x_m točka minimuma):

   A. $x_m = 3, x_M = -3$ **B.** $x_M = 0, x_m = -3$
   C. nema ekstrema **D.** $x_m = -3, x_M = 3$

4. Polumjer osnovke od valjaka oplošja 54π cm^2 s najvećim obujmom je:

   A. 6 **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 9

5. Najveća i najmanja vrijednost funkcije $f(x) = \ln x - x^2 + x$ na odresku $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ su:

   A. $m = -2,\ M = 0$ **B.** $m = \ln 2 - 2,\ M = 0$
   C. $m = \ln 2,\ M = 2$ **D.** $m = 0,\ M = 2$

6. Najveća vrijednost funkcije $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 20x$ na odresku $[1, 9]$ je:

   A. 63 **B.** 36 **C.** 81 **D.** 72

7. Minimum funkcije $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$ postiže se u točki:

   A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

8. Površina pravokutnika iznosi 8 cm^2. Koliki je najmanji mogući opseg tog pravokutnika?

   A. $8\sqrt{2}$ cm **B.** 8 cm **C.** $4\sqrt{2}$ cm **D.** 4 cm

9. Odredi jednadžbu pravca kroz točku $(3, 4)$ tako da površina trokuta koji taj pravac odsijeca u prvom kvadrantu bude minimalna.

   A. $4x + 3y - 24 = 0$ **B.** $4x - 3y + 24 = 0$
   C. $x + y - 7 = 0$ **D.** $2x + 3y - 18 = 0$

Ispit 3

1. Na kojem je od sljedećih intervala funkcija $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ rastuća?

A. $[0, \infty\rangle$ **B.** $[0, \pi]$ **C.** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **D.** $[\pi, 2\pi]$

2. Maksimum funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ postiže se u točki:

A. 1 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 2

3. Najveća i najmanja vrijednost funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$ na odresku $[1, 3]$ su:

A. $m = -2,\ M = 1$ **B.** $m = -2,\ M = 0$
C. $m = -4,\ M = 0$ **D.** $m = -4,\ M = 1$

4. Kolika je najmanja moguća vrijednost zbroja pozitivnog broja i njegove recipročne vrijednosti?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** nije određena

5. Funkcija $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ ima ekstreme u sljedećim točkama (x_M točka maksimuma i x_m točka minimuma):

A. $x_m = \frac{9}{2},\ x_M = -\frac{1}{2}$ **B.** $x_M = 0,\ x_m = -2,\ x_m = 2$
C. nema ekstrema **D.** $x_m = 0,\ x_m = -2,\ x_M = 2$

6. Koja je točka krivulje $x \cdot y = 8$ najbliža ishodištu koordinatnog sustava?

A. $T(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ **B.** $T(2, 2)$ **C.** $T(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **D.** $T(\sqrt{2}, 2)$

7. U kojoj je od sljedećih točaka funkcija $f(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 1$ rastuća i konveksna?

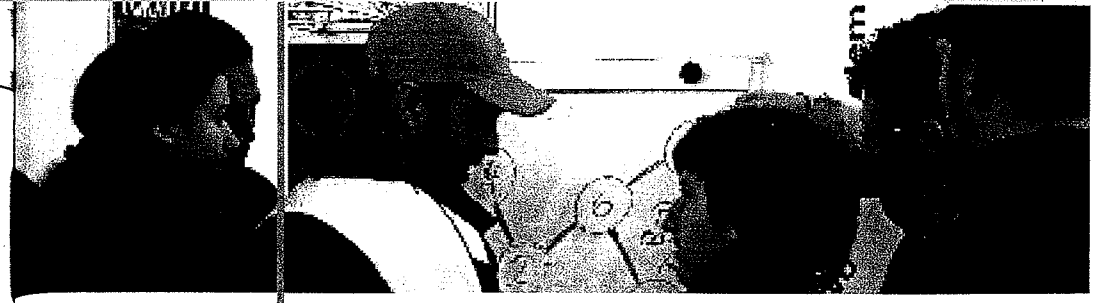
A. $(-4, 33)$ **B.** $(-1, -6)$ **C.** $(0, 1)$ **D.** $(2, 9)$

8. Funkcija $f(x) = x^3 + px^2 - 6x$ ima lokalni maksimum u točki $x = -2$. Kolika je vrijednost parametara p?

A. 1 **B.** -2 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 2

9. Vrh pravokutnika je u ishodištu a dvije njegove stranice leže na koordinatnim osima. Četvrti vrh bira se na pravcu $x + 2y = 16$, tako da površina pravokutnika bude maksimalna. Kolika je ta površina?

A. 24 **B.** 32 **C.** 36 **D.** 48



Završni ispiti

1. završni ispit

1. Zbroj n uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 270. Ako je najveći od njih 25, najmanji je jednak:

A. 15 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 5

2. Otac je stariji od sina četiri puta. Za 22 godine otac će biti dvostruko stariji. Broj godina t koliko ih sada ima otac možemo izračunati iz jednadžbe:

A. $t-22=4\cdot\left(t-\frac{1}{4}\right)+22$ **B.** $t+22=2\left(\frac{t}{4}+22\right)$

C. $t+22=4\cdot t-\frac{1}{4}+22$ **D.** $t\cdot\left(\frac{t}{4}+22\right)=22-t$

3. Koeficijent uz x^2y^2 u polinomu $(x^2-2xy+y^2)^2$ jednak je:

A. -6 **B.** 1 **C.** -4 **D.** 6

4. Ako je $-1<1-5x<3$, onda je:

A. $x>\frac{4}{5}$ **B.** $x>-\frac{2}{5}$ **C.** $|x|<\frac{2}{5}$ **D.** $x<0$

5. Broj svih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $\frac{x+1}{2x+3}\leq -1$ jednak je:

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

6. Dan je kompleksni broj $z=1-3i$. Ako je $\frac{1}{z}=a+bi$, onda je:

A. $a+b=-1$ **B.** $a+b=0$ **C.** $a+b=-0.3$ **D.** $a+b=0.4$

7. Rješenje jednadžbe $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{x}}=1$ je broj:

A. $x=0$ **B.** $x=1$ **C.** $x=2$ **D.** $x=3$

8. Parabola $y=x^2+bx+c$ prolazi točkama $A(-1,-5)$ i $B(3,-5)$. Zbroj apscisa točaka u kojima parabola siječe os x jednak je:

A. 1 **B.** -3 **C.** 4 **D.** 2

9. Ako je $\log 2=m$, rješenje jednadžbe $4^{x+1}=320$ jednako je:

A. $x=\frac{3m+1}{2m}$ **B.** $x=\frac{5m-1}{2}$ **C.** $x=\frac{m+1}{5m}$ **D.** $x=\frac{3m-1}{2}$

10. Funkcija $f(x)=\sqrt{\log_2 x^2}$ definirana je za svaki x, takav da vrijedi:

A. $|x|\geq 1$ **B.** $x\neq 0$ **C.** $|x|\leq 1$ **D.** $x\geq 1$

11. Inverzna funkcija funkcije $f(x)=\frac{1}{2}e^{2-x}$ jest funkcija:

A. $f^{-1}(x)=2-\ln x$ **B.** $f^{-1}(x)=\ln\frac{1-e^2}{2}$

C. $f^{-1}(x)=\ln\frac{e^2}{2x}$ **D.** $f^{-1}(x)=1+2\ln x$

12. Ako je $\cos x=-\frac{3}{5}$, $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$, tada je $\operatorname{tg}2x$ jednako:

A. $-\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{7}{24}$ **C.** $-\frac{24}{7}$ **D.** $\frac{4}{3}$

13. Dvije stranice pravokutnika pripadaju pravcima $x-y+3=0$ i $x+y+3=0$. Jedan vrh pravokutnika je točka $(1,5)$. Površina pravokutnika jednaka je:

A. 3 kv. jed. **B.** 4.5 kv. jed. **C.** 6 kv. jed. **D.** 9 kv. jed.

14. Točke $M(-1,2)$ i $N(3,-6)$ krajnje su točke promjera kružnice. Duljina tetive što je ta kružnica odsijeca na osi x jednaka je:

A. 8 **B.** $2\sqrt{5}$ **C.** 4 **D.** $5\sqrt{2}$

15. Kut što ga zatvaraju kazaljke sata u 17 h i 18' jednak je:

A. 44° **B.** 48° **C.** 51° **D.** 55°

16. Duljina dužine koja spaja polovišta dijagonala trapeza jednaka je 5 cm. Ako je duljina veće osnovice 13 cm, duljina manje je:

A. 1.5 cm **B.** 3 cm **C.** 4 cm **D.** 4.5 cm

17. Površina romba jednaka je 120 cm^2. Razlika duljina njegovih dijagonala iznosi 14 cm. Romb rotira oku veće dijagonala pri čemu nastane tijelo čija je površina jednaka:

A. 96π cm^2 **B.** 120π cm^2 **C.** 150π cm^2 **D.** 130π cm^2

18. Funkcija $f(x)=\cos x-\sin x$ rastuća je na intervalu:

A. $[0,\infty\rangle$ **B.** $[0,\pi]$ **C.** $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ **D.** $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

19. Jednadžba tangente na krivulju $y=\operatorname{tg}2x$ koja je paralelna s pravcem $y=4x$ glasi:

A. $y=4x$ **B.** $y=4x-\frac{\pi}{2}+1$ **C.** $y=4x-\frac{\pi}{2}$ **D.** $y=4x-\frac{\pi}{8}$

20. Najmanja vrijednost funkcije $f(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ na odresku $\left[\frac{1}{8},2\right]$ je

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

2. završni ispit

1. Kvadrati dvaju uzastopnih prirodnih brojeva razlikuju se za 71. Zbroj tih brojeva jednak je:
   A. 71 **B.** 35 **C.** 77 **D.** 142

2. Vrijednost razlomka $\frac{10^{13}-10^9}{10^{11}-10^9}$ jednaka je:
   A. 10^9 **B.** 99 **C.** 100 **D.** 101

3. Za svaki $1 < x < 2$, funkcija $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{4x^2-4x+1}$ jednaka je funkciji:
   A. $f(x) = x+1$ **B.** $f(x) = -x-1$
   C. $f(x) = x-1$ **D.** $f(x) = -x+1$

4. Kompleksni broj z jedno je rješenje jednadžbe $z^2 - z + 1 = 0$. Tada je:
   A. $z^{12} = -1$ **B.** $z^{12} = 1-i$ **C.** $z^{12} = i$ **D.** $z^{12} = 1$

5. Zbroj svih rješenja jednadžbe $2x^2 + 3|x| - 2 = 0$ jednak je:
   A. $-\frac{1}{2}$ **B.** -1 **C.** 0 **D.** $-\frac{3}{2}$

6. Tjeme parabole $y = -x^2 - 2x + c$ leži na osi x. Tada je:
   A. $c = 0$ **B.** $c = 2$ **C.** $c = -1$ **D.** $c = -3$

7. Broj znamenki broja 36^{10} jednak je:
   A. 15 **B.** 16 **C.** 17 **D.** 18

8. Koeficijent u razvoju binoma $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10}$ uz potenciju x^2 iznosi
   A. $\binom{10}{1}2^9$ **B.** 13 440 **C.** $\binom{10}{3}2^7$ **D.** 6 720

9. Dana je funkcija $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$. Ako je $f(x) = 2$, onda je $f(2x)$ jednako:
   A. $\frac{3}{4}$ **B.** 16 **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** 4

10. Ako je $\sin\alpha + \sin\beta = 1$, a $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$, tada je $\cos(\alpha-\beta)$ jednako:
    A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** $-\frac{1}{4}$ **D.** 0

11. Jedan vrh trokuta $\triangle ABC$ je točka $A(-3,1)$, točka $C_1(-2,-1)$ polovište je stranice $\overline{AB}$, a točka $T(1,1)$ težište je trokuta. Površina trokuta iznosi:
    A. 12 kv. jed. **B.** 18 kv. jed. **C.** 24 kv. jed. **D.** 36 kv. jed.

12. Udaljenost središta kružnice $x^2+y^2-4x+3y-1=0$ i vrha parabole $y = -\frac{1}{2}x^2+x$ jednaka je:
    A. $\sqrt{7}$ **B.** 3 **C.** 4 **D.** $\sqrt{5}$

13. Za duljine kateta pravokutnog trokuta vrijedi $a^2 - b^2 = ab$. Jedan šiljasti kut toga trokuta iznosi:
    A. $45°15'5''$ **B.** $49°33'27''$ **C.** $54°23'34''$ **D.** $58°16'57''$

14. Točka S središte je kružnice opisane šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$. Zbroj kutova $\sphericalangle SAB + \sphericalangle SBC + \sphericalangle SCA$ jednak je:
    A. 75° **B.** 90° **C.** 105° **D.** 120°

15. Skup svih točaka $T(x,y)$ ravnine takvih da je $x = 3\sin\alpha$, $y = 2\cos\alpha$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, jest elipsa čiji je linearni ekscentricitet jednak:
    A. $\sqrt{5}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{13}$ **D.** 2

16. Točka parabole $y^2 = 4x$ koja je najbliža pravcu $x - 2y + 6 = 0$ jest točka:
    A. $(0,0)$ **B.** $(4,4)$ **C.** $(1,2)$ **D.** $(2,2\sqrt{2})$

17. Točka V od svakog je vrha kvadrata udaljena $\sqrt{10}$ cm. Duljina stranice kvadrata je 4 cm. Udaljenost točke V od ravnine u kojoj leži kvadrat jednaka je:
    A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 3

18. Osnovica najveće polukugle upisane stošcu, čiji je osni presjek jednakostraničan trokut sa stranicom duljine a, leži na osnovci stošca. Duljina crte dodira polukugle i plašta stošca jednaka je:
    A. $\frac{3a}{4}\pi$ **B.** $\frac{5a}{16}\pi$ **C.** $\frac{4a}{9}\pi$ **D.** $\frac{3a}{8}\pi$

19. Derivacija funkcije $f(x) = x + \frac{2}{x}$ u točki u kojoj funkcija poprima vrijednost $2\sqrt{2}$ iznosi:
    A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 0 **D.** ne postoji

20. Najmanja vrijednost funkcije $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x} + 2$ na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ je
    A. -1 **B.** -2 **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $6 - 4\sqrt{2}$

3. završni ispit

1. Ako je $a=4$, $b=5$, onda je $a^{-7}\cdot b^{-7}$ jednako:
   A. $2\cdot 10^{-6}$ **B.** $1.28\cdot 10^{-11}$ **C.** $7.8125\cdot 10^{-10}$ **D.** $6.4\cdot 10^{-11}$

2. Na pismenoj provjeri znanja postavljena su dva zadatka. Prvi zadatak riješilo je 85% ispitanika, drugi 75%, a oba zadatka riješilo je 12 ispitanika. Ako je svaki ispitanik riješio barem jedan od dva zadatka, samo prvi zadatak riješilo je:
   A. 4 ispitanika **B.** 5 ispitanika **C.** 6 ispitanika **D.** 10 ispitanika

3. Realni dio kompleksnog broja z za koji vrijedi $|z|-z=1+2i$ iznosi:
   A. 1 **B.** 0 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** ne postoji

4. Jedan faktor polinoma $f(x)=ax^2-x+1$ je $2x-1$. Drugi je faktor:
   A. $-x-1$ **B.** $x-1$ **C.** $-x+1$ **D.** $x+1$

5. Zbroj recipročnih vrijednosti rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2-3x+c=0$ jednak je 1. Tada je:
   A. $c=-1$ **B.** $c=1$ **C.** $c=3$ **D.** $c=-2$

6. $\left(\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[3]{256}\right)^{-1}=$
   A. $-\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{9}{8}$

7. Propeler glisera u jednoj minuti napravi 750 okretaja. Točka na vrhu propelera od središta vrtnje udaljena je 20 cm. Ta točka za 3 sekunde opiše put duljine:
   A. 7 metara **B.** 17 metara **C.** 37 metara **D.** 47 metara

8. Ako je $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, onda je:
   A. $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$ **B.** $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ **D.** $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Ako je $f(x)=x+c$ linearna funkcija te vrijedi $f\circ f\circ\ldots\circ f(1)=m$, ($n$ puta) onda je:
   A. $c=\frac{m-1}{n}$ **B.** $c=\frac{m}{n-1}$ **C.** $c=\frac{m-n}{2}$ **D.** $c=\frac{n+1}{m}$

10. Područje definicije realne funkcije $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}}$ jest interval:
    A. $\langle -1,1]$ **B.** $\langle 0,1]$ **C.** $\langle -\infty,1]$ **D.** $[1,+\infty\rangle$

11. Točke $A(1,1)$, $B(0,c)$ i $C(c,-3)$ pripadaju jednom pravcu. Ovaj zadatak ima dva rješenja za c. Njihov je umnožak jednak:
    A. -1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** -3

12. Obujam kocke jednak je $1728\ \text{cm}^3$. Omjer površina dviju sfera od kojih je jedna opisana, a druga upisana ovoj kocki jednak je:
    A. 9 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** 3

13. Kružnica prolazi točkama $A(-2,0)$, $B(0,-4)$ i $C(0,0)$. Jednadžba tangente položene na tu kružnicu u točki B glasi:
    A. $2x+y+4=0$ **B.** $x-2y-8=0$ **C.** $x+2y+8=0$ **D.** $2-y-4=0$

14. Udaljenost žarišta hiperbole $4x^2-y^2=4$ od njezine asimptote iznosi:
    A. $\sqrt{5}$ **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

15. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 15 cm, polumjer trokutu upisane kružnice iznosi 2 cm. Opseg trokuta jednak je:
    A. 34 cm **B.** 36 cm **C.** 40 cm **D.** 42 cm

16. Pravci AD i BC na kojima leže krakovi trapeza $ABCD$ sijeku se u točki E. Duljine krakova su $|AD|=5$ cm i $|BC|=6$ cm, a duljine osnovica $|AB|=15$ cm i $|CD|=10$ cm. Zbroj $|DE|+|CE|$ jednak je:
    A. 20 cm **B.** 22 cm **C.** 24 cm **D.** 26 cm

17. Brojevi $1+\log_2 x$, $\log_4 x$, $1+\log_8 x$ uzastopni su članovi aritmetičkog niza. Njihov je zbroj jednak:
    A. -5 **B.** 8 **C.** -9 **D.** 3

18. Za koje vrijednosti koeficijenta a funkcija $f(x)=ax^3+x^2+2x+2$ monotono raste na cijelom području definicije?
    A. $a<\frac{1}{6}$ **B.** $a>0$ **C.** $a<-1$ **D.** $a>\frac{1}{6}$

19. Pravac siječe parabolu $y=x^2-2x+5$ u točkama s apscisama $x_1=1$, $x_2=3$. Jednadžba tangente na tu parabolu paralelnu s tim pravcem glasi:
    A. $y=2x-1$ **B.** $y=-2x+1$ **C.** $y=2x+1$ **D.** $y=-2x-1$

20. Najmanja vrijednost funkcije $f(x)=\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}$ na intervalu $[1,6]$ je
    A. 5 **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** 3 **D.** 4

4. završni ispit

1. Ako je $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$ te $a + b + c + d = 665$, onda je:

A. $c = 75$ **B.** $c = 150$ **C.** $c = 200$ **D.** $c = 240$

2. Dvije vrste kave, jedna po 40 kn za kilogram i druga 35 kn za kilogram, treba pomiješati tako da se dobije kava po cijeni od 36 kn za kilogram. Omjer u kojem treba miješati kavu jednak je:

A. 2 : 5 **B.** 1 : 3 **C.** 4 : 9 **D.** 1 : 4

3. Jednakost $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (x^2-4x+3)\cdot p(x)$ je identitet ako je:

A. $p(x) = x^2 - 3x + 2$ **B.** $p(x) = x^2 - 6x + 8$
C. $p(x) = x^2 - 5x + 4$ **D.** $p(x) = x^2 - 4x + 3$

4. Jednadžba $||x| - 2| = a$ ima točno četiri rješenja ako je:

A. $a \in \langle 0, 2\rangle$ **B.** $a \in \langle -2, 2\rangle$ **C.** $a \in \langle 2, 4\rangle$ **D.** $a \in \langle -2, 0\rangle$

5. Jedno rješenje jednadžbe $ax(x+1) = (x-1)(x-a)$ je broj -1. Drugo rješenje je broj:

A. $x = 1$ **B.** $x = -1.5$ **C.** $x = -2$ **D.** $x = 0.5$

6. Udaljenost dviju točaka koje su u kompleksnoj ravnini pridružene brojevima $z = -1 + 3i$ i $w = 3 - 5i$ jednaka je:

A. 5 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $4\sqrt{5}$

7. Ako je $\log 2 = m$, tada je $\log(0.25 \cdot 10^{-8})$ jednako:

A. $m + 2$ **B.** $2m - 7$ **C.** $-m - 6$ **D.** $-2m - 8$

8. Izraz $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta)$ identičan je izrazu:

A. $\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$ **B.** $\cos(\alpha^2 - \beta^2)$
C. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$ **D.** $\cos^2 2\alpha - \cos^2 2\beta$

9. Ako je $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, onda je $f^{-1}(x^{-1})$ jednako:

A. $\dfrac{1}{f(x)}$ **B.** $-f(x)$ **C.** $-\dfrac{1}{f(x)}$ **D.** $f(-x)$

10. $\sin^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^4\dfrac{\pi}{8} + \sin^6\dfrac{\pi}{8} + \ldots + \sin^{2n}\dfrac{\pi}{8} + \ldots =$

A. 1 **B.** $3 - \sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2} - 1$

11. Površina trokuta kojem su točke $A_1(4,1)$, $B_1(0,2)$ i $C_1(1,-1)$ polovišta stranica jednaka je:

A. 11 **B.** 22 **C.** 32 **D.** 44

12. Površina lika koji sadrži sve točke T čije koordinate x i y ispunjavaju sustav uvjeta $y \geq |x| - 2$ i $y \leq -\dfrac{1}{2}|x| + 1$ jednaka je:

A. 7.5 kv. jed. **B.** 4 kv. jed. **C.** 6 kv. jed. **D.** 8 kv. jed.

13. Točka elipse $x^2 + 4y^2 = 20$ koja je najbliža pravcu $x + y = 8$ jest točka:

A. $T(1,1)$ **B.** $T(2,2)$ **C.** $T(0,\sqrt{5})$ **D.** $T(4,1)$

14. Visina na osnovicu jednakokračnog trokuta duga je 30 cm, a kut što ga zatvaraju težišnice povučene iz vrhova na osnovici zatvaraju kut od 105°. Površina ovoga trokuta jednaka je:

A. 210 cm^2 **B.** 270 cm^2 **C.** 322 cm^2 **D.** 391 cm^2

15. Iz točke P povučene su tangente na kružnicu. Dirališta su točke A i B. Tangenta na kružnicu položena u nekoj točki luka AB siječe dužine $\overline{PA}$, odnosno $\overline{PB}$ u točkama M i N. Ako je $|PA| = 10$ cm, opseg trokuta $\triangle MPN$ jednak je:

A. 20 cm **B.** 15 cm **C.** 22 cm **D.** 18 cm

16. Točka P dijeli stranicu $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$ u omjeru 2 : 3 od točke D. Omjer površine trokuta $\triangle ACP$ i površine pravokutnika jednak je:

A. 4 : 9 **B.** 2 : 5 **C.** 3 : 10 **D.** 1 : 4

17. Zbroj $n-1$ kutova konveksnog n-terokuta jednak je 1 380. Kut koji nije u zbroju iznosi:

A. 10° **B.** 30° **C.** 45° **D.** 60°

18. Koliko kružnih prstenova unutarnjeg promjera 1 cm i vanjskog 2 cm, a debljine 2 mm možemo istokariti od 100 kg bakra specifične težine 8.9 g/ cm^3 ?

A. 22 344 **B.** 2 110 **C.** 13 561 **D.** 23 843

19. Za koju vrijednost parametra p funkcija $f(x) = x^3 - px$ raste za sve x?

A. $p \geqslant 1$ **B.** $p \geqslant 0$ **C.** $p \leqslant 0$ **D.** $p \leqslant 1$

20. Najveća vrijednost funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 12}$ na intervalu $[1,4]$ je

A. $2\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 4

5. završni ispit

1. U dvorani su 32 reda, u svakom redu je po 25 stolica. Ako su sjedala numerirana brojevima od 1 do 800, počevši od prvog reda, u kojem je redu sjedalo s brojem 555?

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

2. Modul kompleksnog broja $\frac{2i}{1+i} - \frac{3}{2-i}$ iznosi

A. $\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{5}}$ **B.** $\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{1}{5}$

3. Rješenje nejednadžbe $\frac{x^2}{2x-1} \leq 1$ jest:

A. $x \geqslant -\frac{1}{2}$ **B.** $x \geqslant 1$ **C.** $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ **D.** $x \leqslant \frac{1}{2}$ ili $x = 1$

4. Polinom $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ prima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x ako i samo ako je:

A. $a > 0$ **B.** $a > \frac{1}{3}$ **C.** $a > 1$ **D.** $a > \frac{1}{4}$

5. Rješenje jednadžbe $|x|^{-2} - |x|^{-1} = 1$ su:

A. $\pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **B.** $\pm\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ **C.** $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **D.** $\pm\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

6. Rješenje nejednadžbe $4^{\log_2 x} + x^2 < 8$ jest interval:

A. $-2 < x < 2$ **B.** $x > -2$ **C.** $1 < x < 2$ **D.** $0 < x < 2$

7. Umnožak rješenja jednadžbe $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$ jednak je:

A. 1 **B.** -2 **C.** 4 **D.** 6

8. Ako je $f(t) = 5.6 \cdot e^{1-2kt}$ i $f(-1) = 11.5$, onda je:

A. $k = -0.17$ **B.** $k = -1.2$ **C.** $k = -0.14$ **D.** $k = 0.67$

9. Opći član niza (a_n) zadan je formulom $a_n = (-1)^n \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$. Zbroj prvih 12 članova ovog niza jednak je:

A. -4 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 2

10. Broj rješenja jednadžbe $\operatorname{tg} 2x = \sin 4x$ u intervalu $[0, 2\pi]$ jednak je:

A. 13 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 10

11. Na zemljopisnoj karti udaljenosti od 1500 m odgovara dužina duljine 5 cm. Koliku površinu, u km^2, predočuje površina od 10 cm^2 na karti?

A. 1.1 km^2 **B.** 0.3 km^2 **C.** 1.8 km^2 **D.** 0.9 km^2

12. Svi pravci iz skupa zadanog jednadžbom $y - kx = k + 3$, $k \in \mathbf{R}$ prolaze jednom točkom u ravnini. Zbroj koordinata te točke jednak je:

A. 0 **B.** -1 **C.** 3 **D.** 2

13. Polumjer kružnice koja prolazi nultočkama i tjemenom parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ jednak je:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

14. Pravac $x - 2y + 8 = 0$ tangenta je parabole $y^2 = 2px$. Udaljenost dirališta od žarišta parabole jednaka je:

A. 10 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 6 **D.** $3\sqrt{2}$

15. Ako je $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ te $f^{-1}(-1) = -1$, onda je:

A. $f^{-1}(1) = 0$ **B.** $f^{-1}(1) = -1$ **C.** $f^{-1}(1) = 1$ **D.** $f^{-1}(1) = 0.1$

16. Omjer duljina visine na osnovicu i visine na krak jednakokračnog trokuta je 5 : 4. Razlika kuta nasuprot kraku i kuta nasuprot osnovici ovog trokuta jednaka je:

A. 15°15′55″ **B.** 17°15′55″ **C.** 19°15′55″ **D.** 21°15′55″

17. Površina pobočja pravilne trostrane piramide tri puta je veća od površine osnovke. Prikloni kut pobočke prema ravnini osnovke piramide jednak je:

A. 70°31′43″ **B.** 60°23′54″ **C.** 65°11′46″ **D.** 74°24′53″

18. Zajednički vrh dvaju stožaca nalazi se unutar valjka na njegovoj osi, a osnovice im se podudaraju s osnovicama valjka. Ako je V_s ukupan obujam dvaju stožaca, a V_v obujam valjka, onda je:

A. $V_v = 4V_s$ **B.** $V_v = 3V_s$ **C.** $V_v = 6V_s$ **D.** $V_v = 9V_s$

19. Derivacija funkcije $f(x) = \frac{x^7 - 1}{x^7 + 1}$ je:

A. $\frac{7x^6}{x^7+1}$ **B.** $\frac{14x^6}{(x^7+1)^2}$ **C.** $\frac{7x^6}{(x^7+1)^2}$ **D.** 1

20. Na kojem je od sljedećih intervala funkcija $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ monotona?

A. $[-1, 1]$ **B.** $[1, 3]$ **C.** $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ **D.** $[0, 3]$

6. završni ispit

1. Za $x < 0$ razlomak $\dfrac{\sqrt{x^2 - x\sqrt{8} + 2}}{x - \sqrt{2}}$ jednak je:

A. 1 **B.** $x + \sqrt{2}$ **C.** -1 **D.** $\sqrt{2} - x$

2. Zbroj rješenja jednadžbe $\sqrt[4]{x} = \dfrac{12}{7 - \sqrt[4]{x}}$ iznosi:

A. 337 **B.** 169 **C.** 400 **D.** 25

3. Rješenje jednadžbe $|z - 1| = |z + i|$ je svaki kompleksni broj z za koji vrijedi:

A. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = -1$ **B.** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$
C. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$ **D.** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = i$

4. Skup svih vrijednosti polinoma $f(x) = ax^2 - 4x + 3$ je interval $\langle -\infty, 4]$. Najveću vrijednost ovaj polinom prima za:

A. $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ **B.** $x_0 = \dfrac{1}{4}$ **C.** $x_0 = -1$ **D.** $x_0 = \dfrac{1}{2}$

5. Broj $x = 3000$ podijelite na dva dijela tako da 4% prvog dijela zajedno s 8% drugog čini 6.4% broja x. Razlika tih dvaju dijelova jednaka je:

A. 200 **B.** 400 **C.** 600 **D.** 800

6. Dan je niz (a_n) čiji je prvi član $a_1 = 3$. Ako vrijedi $a_m + a_n = a_{m+n}$, onda je:

A. $a_{10} = 30$ **B.** $a_{10} = 15$ **C.** $a_{10} = 35$ **D.** $a_{10} = 25$

7. Graf funkcije $f(x) = a \cdot 2^{x-1} + b$ prolazi točkama $M(1, 2)$ i $N(2, 5)$. Nultočka te funkcije je broj približno jednak:

A. 0.484 **B.** -0.858 **C.** 0.343 **D.** -0.585

8. Rješenje jednadžbe $2 \cdot (\sqrt{2})^{\log_{\frac{1}{2}} x} = \sqrt{x} - 1$ je broj:

A. $x = 1$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

9. $\left(\log_4(27^{\log_9 8})\right)^{-\frac{3}{2}} =$

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{8}{27}$ **C.** $-\dfrac{4}{9}$ **D.** $\dfrac{9}{4}$

10. Zrcaljenjem grafa funkcije $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$ preko pravca $x - y = 0$ dobije se graf funkcije:

A. $g(x) = \ln \dfrac{2}{x}$ **B.** $g(x) = \ln(2x)$ **C.** $g(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ **D.** $g(x) = \ln \dfrac{1}{2x}$

11. Pravac $x - 3y + 5 = 0$ siječe kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ u točkama A i B. Veći obodni kut kružnice nad tetivom $\overline{AB}$ iznosi:

A. $143°8'$ **B.** $108°26'$ **C.** $194°11'$ **D.** $216°52'$

12. Na elipsu $3x^2 + 4y^2 = 48$ položene su tangente paralelno pravcu $x - 2y + 11 = 0$. Međusobna udaljenost tih tangenata jednaka je:

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $\dfrac{16}{\sqrt{5}}$ **C.** 4 **D.** $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$

13. Promjer prednjih kotača nekog vozila jednak je 0.8 m, a promjer stražnjih je 1 m. Ako je prednji kotač napravio 550 okretaja više nego stražnji, put koje je vozilo prešlo dug je:

A. 8.4 km **B.** 6.9 km **C.** 2.8 km **D.** 11.5 km

14. Duljine dviju stranica trokuta $\triangle ABC$ jednake su 12 cm i 15 cm. Površina trokuta iznosi 72 cm^2. Ako je kut nasuprot trećoj stranici trokuta tup, onda je duljina te treće stranice jednaka:

A. 24.2 cm **B.** 18 cm **C.** 28.6 cm **D.** 12.4 cm

15. Dvije ravne ceste sijeku se pod kutom od 135°. Neka je kuća od jedne ceste udaljena 3 km, a od druge 5 km. Udaljenost te kuće od križanja dviju cesta jednaka je:

A. 7.2 cm **B.** 4.5 cm **C.** 6.3 cm **D.** 5.06 cm

16. Površine strana kvadra jednake su 30 cm^2, 40 cm^2 i 48 cm^2. Obujam toga kvadra jednak je:

A. 120 cm^3 **B.** 180 cm^3 **C.** 240 cm^3 **D.** 300 cm^3

17. Romb se vrti oko manje, a potom oko veće dijagonale. Ako je šiljasti kut romba jednak α, omjer obujmova manjeg i većeg rotacijskog tijela jednak je:

A. $\operatorname{tg} \alpha$ **B.** $\cos \dfrac{\alpha}{2}$ **C.** $\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$ **D.** $\operatorname{ctg} 2\alpha$

18. Derivacija funkcije $f(x) = \sin 4x \cos 4x$ je:

A. $-16 \cos 4x \sin 4x$ **B.** $-\cos 4x \sin 4x$
C. $4(\cos^2 4x - \sin^2 4x)$ **D.** $8 \cos 8x$

19. Jednadžba tangente na graf funkcije $f(x) = \ln x$ u njezinoj nultočki glasi:

A. $y = x - 1$ **B.** $y = -x + 1$ **C.** $y = x + 1$ **D.** $y = -x - 1$

20. Na kojem od sljedećih intervala funkcija $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 3$ nije konveksna?

A. $[1, 2]$ **B.** $[0, 1]$ **C.** $[2, 3]$ **D.** $[3, 5]$

7. završni ispit

1. Broj $(12!)\cdot(11!)\cdot(10!)\cdot\ldots\cdot(2!)\cdot(1!)$ je cijeli broj koji završava s n nula. Tada je:

A. $n=10$ **B.** $n=11$ **C.** $n=12$ **D.** $n=13$

2. Zbroj kompleksnih nultočaka polinoma $p(x)=x^3-2x^2+2x-1$ jednak je:

A. -1 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -2

3. Sustavom nejednadžbi $x-1\le 0$, $x-2y+6\ge 0$, $y+1\ge 0$ određen je skup točaka ravnine. Tom skupu ne pripada točka:

A. $A(0,0)$ **B.** $B(-4,1)$ **C.** $C(-3,2)$ **D.** $D(0,2)$

4. Algebarski izraz $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2:\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)$ ekvivalentan je izrazu:

A. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2$ **B.** $\frac{x+y}{xy}$ **C.** $\frac{x^2-y^2}{xy}$ **D.** $\frac{1}{xy}$

5. Jednadžba $x^2-2(m-3)x+m^2-1=0$, $m\in\mathbf{R}$ ima dvostruko realno rješenje. To je rješenje broj:

A. $-\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{4}$

6. Rješenje jednadžbe $|x-y+3|=|x+y-3|$ je skup svih uređenih parova oblika:

A. $(0,3)$ **B.** $(x,3)$ ili $(0,y)$ **C.** $(x,0)$ ili $(3,y)$ **D.** $(x,-3)$ ili $(3,y)$

7. Zbroj znamenki broja x koji je rješenje jednadžbe $\sqrt{75+\sqrt{45-\sqrt{x-1}}}=9$ jednak je:

A. 11 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 13

8. Ako je $a=\log_2\sqrt[4]{8}$, $b=9^{-1.5}$, $c=0.\dot{2}$, $d=\cos\frac{35\pi}{6}$, onda je:

A. $b<a<d<c$ **B.** $b<c<d<a$ **C.** $c<b<d<a$ **D.** $b<c<a<d$

9. Ako je $\log 2=m$, onda je $\log(2.5\cdot 10^{-9})$ jednako:

A. $-2(m+4)$ **B.** $4m-2$ **C.** $-2m-9$ **D.** $m-1$

10. Ako je $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, onda je $f(100)\cdot f(99)\cdot f(98)\cdot\ldots\cdot f(2)$ jednako:

A. $\frac{200}{101}$ **B.** 2 **C.** $\frac{100}{101}$ **D.** $\frac{1}{101}$

11. Zbroj udaljenosti svake točke krivulje $\mathcal{K}$ od točaka $M(-2,0)$ i $N(2,0)$ jednaka je 8. Ako točka $T(2,y>0)$ leži na toj krivulji, onda je:

A. $y=3$ **B.** $y=4$ **C.** $y=1$ **D.** $y=2$

12. Udaljenost žarišta parabole $y^2=16x$ i parabole koja joj je simetrična s obzirom na pravac $x-y=0$ jednaka je:

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** 8

13. Kutna brzina sekundne kazaljke ručnog sata jednaka je:

A. $\frac{\pi}{30}$ rad/ s **B.** $\frac{\pi}{15}$ rad/ s **C.** $\frac{\pi}{60}$ rad/ s **D.** $\frac{\pi}{12}$ rad/ s

14. Tri se kruga međusobno diraju izvana. Njihova središta vrhovi su trokuta sa stranicama duljina 8 cm, 9 cm i 11 cm. Zbroj površina svih triju krugova jednaka je:

A. 28π cm^2 **B.** 70π cm^2 **C.** 64π cm^2 **D.** 48π cm^2

15. Dijagonale trapeza $ABCD$ sijeku se u točki S. Ako je $|AB|=18$ cm, $|CD|=12$ cm te $P(\triangle ABS)=45$ cm^2, onda je $P(\triangle CDS)$ jednaka:

A. 24 cm^2 **B.** 12 cm^2 **C.** 15 cm^2 **D.** 20 cm^2

16. Koliko različitih boja treba upotrijebiti za bojenje $2n$-terostrane piramide ako svake dvije njezine strane koje imaju zajednički brid ne smiju biti obojene istom bojom?

A. 3 **B.** $n+1$ **C.** 4 **D.** n

17. Dvije sfere leže na ravnini i diraju se. Točka njihova dodira od ravnine je udaljena 15 cm. Ako je polumjer jedne sfere 12 cm, polumjer druge je:

A. 20 cm **B.** 5 cm **C.** 10 cm **D.** 25 cm

18. Kraci jednakokračnog trokuta leže na pravcima $2x-4y+3=0$ i $x+2y-1=0$ s vrhom u njihovu sjecištu. Ako je taj trokut tupokutan, njegova osnovica pripada pravcu čiji je nagib jednak:

A. $k=-1$ **B.** $k=0$ **C.** $k=1$ **D.** $k=-2$

19. Na kojem je dijelu intervala $[0,\pi]$ funkcija $f(x)=-x+\sin(2x)$ rastuća?

A. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ **B.** $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ **D.** nigdje

20. Najmanja i najveća vrijednost funkcije $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+1$ na intervalu $[-3,4]$ iznosi

A. $m=3$, $M=63$ **B.** $m=-3$, $M=63$

C. $m=-3$, $M=33$ **D.** $m=3$, $M=33$

8. završni ispit

1. Ako je $a(a-b)=11$, a $b(a-b)=13$, tada je:

A. $a^2-b^2=143$ **B.** $a^2-b^2=2$ **C.** $a^2-b^2=24$ **D.** $a^2-b^2=48$

2. Zbroj 25% od $3.6\cdot 10^{10}$ i 20% od $4.5\cdot 10^{11}$ iznosi:

A. $9.9\cdot 10^{10}$ **B.** $6.6\cdot 10^{9}$ **C.** $9.9\cdot 10^{11}$ **D.** $3.3\cdot 10^{12}$

3. $0.\dot{3}+0.\dot{6}+0.\dot{9}=$

A. 1.8 **B.** 2 **C.** 1.9 **D.** $1.\dot{8}$

4. Ako umnošku triju uzastopnih cijelih brojeva dodamo njihov trostruki zbroj pa potom oduzmemo kub srednjeg broja, dobit ćemo broj 160. Najveći od ta tri broja djeljiv je sa:

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

5. Ako je $a\star b=a^2-ab+b^2$, rješenje jednadžbe $(2\star 4)\star x=108$ je broj:

A. 12 **B.** 10 **C.** 8 **D.** 6

6. Ako se duljina osnovice trokuta poveća za 10%, a duljina visine na osnovicu smanji za 10%, površina trokuta se:

A. ne promijeni **B.** poveća za 10% **C.** poveća za 1% **D.** umanji za 1%

7. Rješenje nejednadžbe $\dfrac{2}{|x-1|}-\dfrac{1}{|2-2x|}\geq 1$ je svaki realni broj x:

A. $x\leq\dfrac{5}{2},\ x\neq 1$ **B.** $x\neq 1$

C. $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2},\ x\neq 1$ **D.** $x\geq-\dfrac{1}{2},\ x\neq 1$

8. Zbroj svih koeficijenata polinoma $p(x)=(2x-3)^{11}$ jednak je:

A. -1 **B.** 11 **C.** 6 **D.** 0

9. Ako je $\log_a 0.25=2$, $\log_{\frac{1}{3}}27=b$, $\log_8 c=-\dfrac{2}{3}$, onda je:

A. $abc=\dfrac{1}{4}$ **B.** $abc=\dfrac{2}{5}$ **C.** $abc=-\dfrac{3}{8}$ **D.** $abc=\dfrac{4}{9}$

10. Ako je $4^x-4^{x-1}=24$, onda je 8^x jednako:

A. $16\sqrt{2}$ **B.** $128\sqrt{2}$ **C.** $32\sqrt{2}$ **D.** $64\sqrt{2}$

11. Udaljenost svake dvije susjedne nultočke funkcije $f(x)=a\sin bx\cdot\cos bx$ jednaka je $\dfrac{3\pi}{4}$. Tada je:

A. $b=\dfrac{1}{3}$ **B.** $b=\dfrac{3}{4}$ **C.** $b=\dfrac{2}{3}$ **D.** $b=\dfrac{3}{4}$

12. Točke $A(-1,2)$, $B(11,-2)$ i $C(-7,12)$ vrhovi su trokuta $\triangle ABC$. Težišnice iz vrhova A i C sijeku se pod kutom od:

A. 45° **B.** 90° **C.** 75° **D.** 120°

13. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta jednaka je $\sqrt{145}$ cm, zbroj duljina kateta iznosi 17 cm. Površina toga trokuta je:

A. $36\sqrt{2}$ cm^2 **B.** 36 cm^2 **C.** 24 cm^2 **D.** $12\sqrt{2}$ cm^2

14. Paralelno stranici $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ položen je pravac koji siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki M, a stranicu $\overline{BC}$ u točki N. Ako je $|AB|=2x+4$ cm, $|MN|=2x$ cm, $|BN|=x-1$ cm, $|NC|=2x+3$ cm, onda je:

A. $x=4$ cm **B.** $x=3$ cm **C.** $x=5$ cm **D.** $x=6$ cm

15. Duljine stranica trokuta jednake su 4 cm, 13 cm i 15 cm. Ako je α srednji po veličini kut ovoga trokuta, onda je:

A. $\sin\alpha=0.5$ **B.** $\sin\alpha=0.6$ **C.** $\sin\alpha=0.7$ **D.** $\sin\alpha=0.8$

16. U vrhu V poliedra sastaje se n strana, pri čemu su na svim stranama kutovi pri vrhu V jednaki i iznose 60°. Tada je:

A. $2\leq n\leq 4$ **B.** $n\geq 3$ **C.** $n\leq 6$ **D.** $3\leq n\leq 5$

17. Visina piramide podijeljena je na tri sukladna dijela pa su dijelišnim točkama položene ravnine paralelne osnovci piramide. Ako je obujam srednjeg dijela piramide dobivenog ovim presjecima jednak 21 cm^3, obujam cijele piramide je:

A. 112 cm^3 **B.** 96 cm^3 **C.** 81 cm^3 **D.** 64 cm^3

18. Ako je $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$, onda $f'(1)$ iznosi:

A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** 0 **C.** 2 **D.** 4

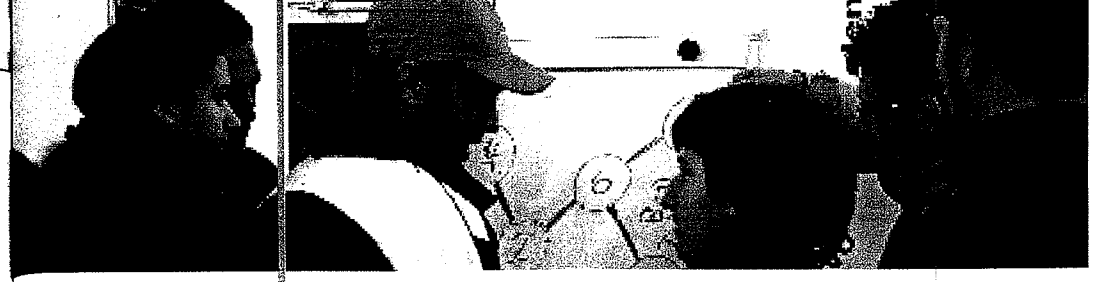
19. Intervali rasta funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ su:

A. $\langle-\sqrt{3},\sqrt{3}\rangle$ **B.** $\langle-\infty,-\sqrt{3}\rangle$, $\langle+\sqrt{3},\infty\rangle$

C. $\langle-\infty,2-\sqrt{3}\rangle$, $\langle 2+\sqrt{3},\infty\rangle$ **D.** $\langle 2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\rangle$

20. Najveća vrijednost funkcije $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ na intervalu $\langle-1,1\rangle$ jednaka je:

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 2



Rješenja zadataka

1. lekcija

1. $a+b+c=\pm 11.5$.
2. 6.
3. 3.
4. **1)** 51; **2)** 90.
5. 5, 6, 7, ..., 15.
6. 4290.
7. $c=\frac{5}{18}$.
8. $\frac{3}{5}$.
9. $x:y:z=10:6:15$.
10. $x+y=1$ ili $x+y=10$.
11. 4.
12. **1)** $n=7$; **2)** $n=8$.
13. **1)** $\frac{5}{4}$; **2)** $\frac{2}{3}$.
14. **1)** $n=5$; **2)** $n=5$; **3)** $n=3$.
15. $mn=-1$.
16. 13.
17. 5, odnosno 4.
18. **1)** 2^{11}; **2)** 3^{12}; **3)** 6^n.
19. 65.
20. 75.6.
21. 25
22. 13.3 boda.
23. 60%.
24. 1450 kn.
25. 8.16%.
26. 10.7%.
27. 25.
28. 22.
29. $\frac{7}{18}$.
30. $-11+2\sqrt{2}$.
31. ab.
32. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}$.
33. $\sqrt[3]{x^{-2}}$.
34. $\frac{27}{8}$.
35. $-5-2\sqrt{6}$.
36. $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}}{5}$.
37. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1$.
38. -1.
39. $\frac{2}{\sqrt[3]{ab^2}}$.
40. $\frac{a^2-b^2}{ab}$.

2. lekcija

1. $\frac{10}{3}$.
2. -1.
3. $\frac{20}{7}$.
4. $\frac{7}{2}$.
5. 47.
6. $x=2y$, $y=-1$, $x=-z$, a odatle je $x=-2$, $y=-1$, $z=2$. Dakle, $x+y+z=-1$.
7. **1)** $(x-y)(x+y+1)$; **2)** $\frac{4}{x+1}$.
8. 1.
9. **1)** $-\frac{a-b}{16a^2b^2}$; **2)** $\frac{2(x+y)}{x-y}$.
10. $a^2(a-1)$.
11. $\frac{a}{2}(a-b-c)$.
12. $\frac{7}{5}$.
13. $\frac{2^n-5^n}{2^n+5^n}$.
14. **1)** 5; **2)** 6.
15. **1)** $4\sqrt{2}$; **2)** $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.
16. $\sqrt{3}$.
17. $a+b$.

3. lekcija

1. $-4a(a+1)$.
2. -203.
3. $a=14$.
4. 27.
5. $f(1)=-11$.
6. $g(x)=x^3+x^2+2x+1$.
7. 18.
8. $f(-1)=-9$.
9. $f(1)=1$.
10. $f(x)=(x^2-2x+1)^2=(x-1)^4$.
11. Stupanj $f=15$.
12. 0.
13. **1)** $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$;
    2) $a=-1$, $b=2$.
14. $f(x)=g(x)\cdot(3x^2-3x+5)+(-3x+4)$.
15. $r(x)=x+1$.
16. $f(x)=g(x)\cdot(3x^3-2x^2+x-1)+(-3x)$.
17. $a=b=1$.
18. $a=3$, $b=9$.
19. **1)** $x=2$; **2)** $x=3$.
20. $x_2=i$, $x_3=-1$, $x_4=2$.
21. $x_2=1+i$, $x_3=1$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

4. lekcija

1. $f(x)=-4x+20$.
2. $f(\pi)$, $f(\sqrt{6})$, $f(0.33)$, $f\left(-\frac{4}{7}\right)$, $f(\sqrt[3]{100})$.
3. $F(C)=\frac{9}{5}C+32$;
   1) $F(-20)=-4$;
   2) $C=\left(\frac{340}{9}\right)°\text{F}\approx 37.8°\text{F}$;
   3) $-40°\text{C}=-40°\text{F}$.
4. $f(x)=x-1$.
5. $f(x)=-x+\frac{1}{4}$.
6. $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$;
   2) $x=-\frac{1}{3}$; **3)** $-\frac{5}{3}<x\le\frac{7}{3}$.
7. $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}$.
8. $f(x)=\frac{3}{2}x-20$.
9. $f(x)=75x+50$.
10. **1)** 6.25 litara na 100 km;
    2) $f(x)=-\frac{1}{16}x+48$.
11. **1)** $c=\frac{ab}{b-a}$; **2)** $a=\frac{bc}{b-c}$.
12. $x=1$.
13. $x=\frac{4}{5}$.
14. $x=2$.
15. $x=-\frac{15}{19}$.
16. $x=1$.
17. $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{5}{2}$.
18. 14.
19. 72 km/h.
20. Za $m=0$ jednadžba *nema rješenja*, za $m=2$ jednadžba je *neodređena*. Ako je $m\neq 0$ i $m\neq 2$, jednadžba ima jednoznačno rješenje, $x=\frac{m+2}{m}$.

21. Za $m = 0$ jednadžba nema rješenja, za $m = \frac{2}{3}$ jednadžba je neodređena, a za $m \neq 0$ i $m \neq \frac{2}{3}$ rješenje jednadžbe je $x = -\frac{3m+2}{3m}$.

22. 15 godina.

23. 600 kuna.

24. 25 : 129.

25. 40 minuta.

26. $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{3}{2}$.

27. $x = 1$, $y = -1$.

28. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

29. $(1, 2)$; $(3, 2)$.

30. Ako je $a = 3$, sustav je *neodređen*. Za $a = -3$ sustav *nema rješenja*. Za $a \neq 0$ i $a \neq 3$ sustav ima jednoznačno rješenje: $x = \frac{a}{a+3}$, $y = \frac{-a}{a+3}$.

31. 41.

32. Broj učenika jednak je 32, broj klupa 21.

5. lekcija

1. **1)** $[-10, 0]$; **2)** $[-10, 5\rangle$.

2. **1)** $\emptyset$; **2)** B.

3. $x < \frac{8}{9}$.

4. $x > -\frac{1}{4}$.

5. $x \geq -\frac{1}{8}$.

6. **1)** $x \in [-1, 1\rangle$; **2)** $x < \frac{4}{3}$ ili $x > \frac{3}{2}$.

7. **1)** $x < 0$ ili $x > 1$;
2) $\frac{1}{3} < x \leq \frac{7}{5}$.

8. $a \in \langle -2, 4\rangle$.

9. $-\frac{1}{2} < x < 2$.

10. $x < -1$ ili $x > 1$.

11. $-1 < x < 1$.

12. $x \leq -2$ ili $x > -\frac{1}{2}$.

13. $\sqrt{2} - 1$.

14. $\sqrt{3} - 1$.

15. **1)** $x = 1.15$ ili $x = 1.85$;
2) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$.

16. **1)** $x_1 = 0$, $x_2 = 4$; **2)** $x = \pm 1$.

17. **1)** $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$;
2) $x \leq 2$ ili $x \geq 3$.

18. **1)** $x \leq \frac{1}{2}$ ili $x \geq \frac{3}{2}$;
2) $x \in [-2, -\frac{4}{3}], x \neq -\frac{3}{2}$.

19. $x < \frac{1}{2}$ ili $x > \frac{3}{2}$.

20. $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}, 2\right\rangle$.

21. $x - 2$.

22. $0 < a < 1$.

6. lekcija

1. -1.

2. i.

3. -1.

4. 0.

5. **1)** $\mathrm{Re}\, z = -8$, $\mathrm{Im}\, z = 6$;
2) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{10}$, $\mathrm{Im}\, z = -\frac{1}{2}$.

6. $\mathrm{Re}\, \frac{1}{z} + \mathrm{Im}\, \frac{1}{z} = \frac{a-b}{a^2+b^2}$.

7. **1)** 64; **2)** -64.

8. Da, jesu.

9. $z = 2 - 3i$.

10. $x = \frac{5}{2}$, $y = -1$.

11. $z = 1$, $w = 1 + i$.

12. $x = 2$, $y = 1$.

13. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

14. $\mathrm{Re}\, w = \frac{1}{10}$.

15. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

16. **1)** $50\sqrt{2}$; **2)** $\frac{1}{50}$.

17. $\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}$.

18. $\sqrt{2}$.

19. $z_4 = 2 - i$.

20. $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$.

21. Prvi skup je skup točaka kruga sa središtem u točki $(1, 0)$ i polumjerom 2. Drugi je skup skup točaka ravnine koje su izvan kruga sa središtem u točki $(0, -1)$ i polumjerom 2, uključujući i točke kružnice koja omeđuje krug. Presjek tih dvaju skupova točaka (polumjesec) je rješenje zadatka.

7. lekcija

1. **1)** $x_1 = a + b + c$, $x_2 = a + b - c$;
2) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{11}{6}$;
3) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 1$;
4) $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$;
5) $x = 5$; **6)** $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{12}{5}$.

2. $D = 4m^2 + 4m + 4 = (2m+1)^2 + 3 > 0$.

3. $D = (6a + 1)^2 \geq 0$.

4. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{13}{4}$;
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \frac{45}{8}$;
$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \frac{161}{16}$.

5. **1)** $c = 0$; **2)** $c = \frac{8}{9}$.

6. $x^2 - 5px + 4p^2 + 1 = 0$.
1) $p = \frac{1}{4}$ ili $p = 1$; **2)** $|p| = \frac{3}{\sqrt{14}}$;
3) $p \leq -\frac{2}{3}$ ili $p \geq \frac{2}{3}$.

7. $mx^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$.
1) $m = 1$; **2)** $m = -1$; **3)** $m = \frac{4}{7}$, $x_2 = -2$; **4)** $m = \frac{1}{3}(3 \pm 2\sqrt{3})$.

8. $3x^2 - 4x + 2 = 0$.

9. $9x^2 - 9x + 2 = 0$.

10. $(3, -2)$, $(-2, 3)$.

11. $\frac{2x-1}{5x+2}$.

12. **1)** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$;
2) $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{2}$, $y_0 = f(x_0) = -\frac{9}{4}$;
3) $x < -1$ ili $x > 2$.

13. **1)** $x_1 = -2$, $x_2 = 4$;
2) $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{9}{2}$;
4) $-2 < x < 4$.

14. $f(x) = x^2 - x - 2$.

15. $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$.

16. $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$.

17. $y = 3x^2 + 6x$.

18. $0 < p < \frac{4}{5}$.

19. Ni za koji realni broj m ne možemo dobiti polinom čije bi sve vrijednosti bile veće od 1.

20. Uvjet je ispunjen za svaki realni broj a.

21. $y = 2(x-1)^2$.

22. $y = -5x - 1$.

23. Pravac i parabola sijekuse za svaki izbor parametra k, a za $k = 1$ pravac je tangenta parabole.

24. $D(-1, 2)$.

25. $x < -1$.

26. **1)** $x < 1$ ili $x > 2$;
2) $x \in \langle -4, -3]$.

27. $m = -3$.

28. C je polovište dužine $\overline{AB}$.

29. Vrhovi kvadrata koji je upisan zadanom ,a ima najmanju površinu, u polovištima su stranica danog kvadrata.

8. lekcija

1. $f(2), f(1), f(0), f(-0.5), f(-1.1)$.

2. 2.63.

3. $t = -2.44$.

4. $t = 14$.

5. $\langle -3, +\infty \rangle$.

6. $v = 14.5$ m/ s.

7. $k = -\frac{1}{t} \cdot \ln(0.001n - 1)$.

8. $n = 457\,145$.

9. **1)** $x = \frac{1}{81}$; **2)** $x = -6$;
3) $x = 125$.

10. $-\frac{4}{3}$.

11. **1)** $\frac{27}{64}$; **2)** 27.

12. $-\frac{1}{2}$.

13. $-\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$.

14. 0.

15. 0.1505.

16. $x = \frac{1}{10ab}$.

17. $x = \frac{100}{a^2 - b^2}$.

18. $2 - 2m$.

19. $\frac{6-p}{9}$.

20. $\frac{3-3a}{1+b}$.

21. Više od 2 milijarde godina.

22. $d = 18.25$ metara.

23. $x = 3$.

24. $x = 5$.

25. $x = -1$.

26. $x \approx -1.15$.

27. $x = -2$ ili $x = 4$.

28. $x = 0$.

29. $x = 0$ ili $x = -1$.

30. $x = \pm\frac{1}{2}$.

31. $x = 1$.

32. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\log 4}{\log \frac{2}{3}} \approx -3.419$.

33. $x = 2$.

34. $x = 2$.

35. $x_1 = 0.001$, $x_2 = 10$.

36. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x_2 = 100$.

37. $x_1 = \frac{4}{3}$ i $x_2 = 10$.

38. $x = \frac{4}{3}$.

39. $x = \sqrt{3}$.

40. $x = 2$.

41. **1)** $x = 5$, $y = 1$; **2)** $x = 2$, $y = 1$.

42. $x < 2$.

43. $x \leq -\frac{5}{3}$.

44. $x < -1$.

45. $-1 < x < \log_2 3$.

46. $\frac{1}{10} < x < 10$.

47. $0 < x < \frac{1}{3}$.

48. $x \in \left\langle -4, -\frac{3}{2} \right\rangle$.

49. $0 < x < 3$.

50. $\log_2 3 < x < 2$.

51. $-3 \leq x \leq 1$.

52. $1 \leq x < 2$.

9. lekcija

1. $x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup [-2, +\infty\rangle$.

2. Za svaki realni broj x.

3. $f(2^x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

5. $f(x) = \frac{1}{16}x^2$, $f(4) = 1$.

6. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $f(2) = \frac{2}{3}$.

7. $f(0) = 2$.

8. 2.

9. 4.

10. 4.

11. $D_f = \left\langle -\frac{5}{2}, 1 \right]$.

12. $x < -1$ ili $x > 0$.

13. $D_f = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

14. $x \geq 0$.

15. $x \in \mathbf{R}$ i $x \neq -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

16. Neparna.

17. **1)** Parna; **2)** $P_0 = 4\pi$;
3) $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; **4)** $[-1.1]$.

18. $u = c$.

19. $g \circ f(\log_{\frac{1}{2}} 3) = -4$.

20. $g \circ f(\sqrt{3}) = \frac{4}{9}$.

21. $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{4}{x+1}$.

22. $f^{-1}(x) = 5(5^{-x} + 1)$.

10. lekcija

1. **1)** $\alpha = 1.623$ rad; **2)** $\beta = 15°$.

4. Redom: HA, EF, HA, BC.

6. **1)** Parna; **2)** parna; **3)** parna;
4) neparna.

7. $\operatorname{tg}(-x) = -\frac{24}{7}$.

8. $\sin(-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{11}{12}$.

10. $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

11. $\sin x + \cos x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$.

12. **1)** π; **2)** 2π; **3)** $\frac{\pi}{2}$; **4)** 2π.

13. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

15. 4.

16. -1.

17. **1)** 0, za neparne n, a $\cos x$ za parne n;
2) 0, za neparne n, a $\sin x$ za parne n.

20. **1)** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; **2)** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

21. -1.

22. $\frac{1}{2}$.

23. 150.

24. -1.

25. $\frac{1}{10}(4 + 3\sqrt{3})$.

26. $\sqrt{3}$.

27. 1.

28. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

29. $\frac{1}{8}$.

30. $\sin 2\alpha = -0.96$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$.

31. $-\frac{9}{\sqrt{82}}$.

32. **1)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **2)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

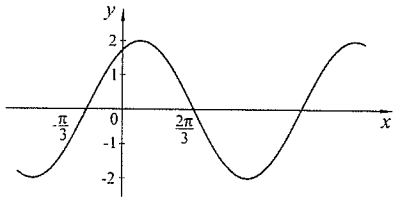
33. $\cos 2x = -\frac{3}{\sqrt{73}}$.

34. **1)** $\frac{1}{4}$; **2)** $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

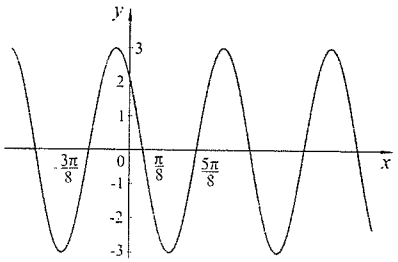
35. $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{3}{10}$.

11. lekcija

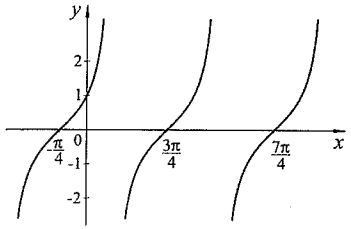
1.



2.



3.



5. $a = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{\pi}{4}$.

6. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$.

7. $a = -1$, $b = 3$, $c = -\frac{\pi}{6}$.

12. 3.

13. 6.

14. Beskonačno.

15. 7.

16. $x = \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

17. $x_1 = k\cdot\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

18. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

19. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$, $x_2 = \operatorname{arc\,tg} 3 + k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

20. $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \operatorname{arc\,tg} 3 + k\pi$, $k \in \mathbf{R}$.

21. $x_1 = k\cdot\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

22. $\cos x = \frac{1}{2}$ ili $\cos x = \frac{1}{3}$.

23. $x = \frac{\pi}{9} + k\cdot\frac{\pi}{3}$ ili $x = \frac{2\pi}{9} + k\cdot\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

24. $x_1 = k\cdot\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

25. $x = \frac{7\pi}{3} + k\cdot 4\pi$ ili $x = \frac{11\pi}{3} + k\cdot 4\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

26. $x = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

27. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

28. $x_1 = (2k+1)\cdot\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

29. $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{3\pi}{2}$ ili $x = \pi + k\cdot\frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

30. $x = k\cdot\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

31. $x = k\cdot\frac{\pi}{7}$, $k \in \mathbf{Z}$.

32. $\left\langle k\cdot 3\pi, \frac{3\pi}{2} + k\cdot 3\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

33. $\left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

34. $(2k-1)\pi \le x \le \frac{8\pi}{3} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

35. $\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

36. $\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

37. $-\frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

38. $-\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

39. $-\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

40. $-\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi < x \le -\frac{\pi}{12} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

41. $-\frac{3\pi}{8} + k\cdot\pi \le x \le \frac{3\pi}{8} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

42. $\frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \le x \le \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

12. lekcija

1. $\varphi = 67°30'$.

2. $60°17'$.

3. Za svaki pravokutni trokut taj je kut $\varphi = 45°$.

4. $\gamma = 90°$.

5. $\alpha = 72°$, $\beta = 36°$.

6. $\alpha = 48°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 72°$.

7. Iz $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$ i $\alpha' + \beta' = 270°$ slijedi $\gamma' = 90°$. Onda je $\gamma = 90°$.

8. $\alpha = 38°32'$, $\beta = 70°44'$.

9. $\sphericalangle CAB = 80°$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 50°$.

10. 16 cm, 30 cm i 34 cm.

11. $a = 56$ cm, $b = 42$ cm.

12. $o = a + b + c = 21 + 28 + 35 = 84$ cm.

13. **1)** 24 cm; **2)** 3 cm^2.

14. $a' = 10$ cm, $b' = 8$ cm, $c' = 4.8$ cm.

15. 18 cm, 24 cm i 36 cm.

16. $\frac{13}{3}$, $\frac{20}{3}$ i 7 cm.

17. 6 cm^2.

18. $P = 420$ cm^2.

19. $|MN| = 3$ cm.

20. $b = 6$ cm.

21. $a = 12$ cm, $b = 10$ cm.

22. 3 cm, 5 cm.

23. $P = 30$ cm^2.

24. 6 cm, 8 cm i 10 cm.

25. Trokuti su slični s koeficijentom sličnosti $k = \frac{3}{4}$.

26. Da, trokuti su slični.

27. 112.5 cm^2.

28. 25 cm i 30 cm.

29. $a' = 48$ cm, $b' = 60$ cm, $c' = 96$ cm.

30. $d = 18$ cm.

31. $|DE| = 12$ cm, $|CE| = 10$ cm.

32. $a' = 6$ cm, $b' = 19.5$ cm, $c' = 22.5$ cm.

33. $d = 7.5$ cm.

34. 6 cm, 4 cm, 2 cm.

35. 42 cm^2, 30 cm^2, 18 cm^2, 6 cm^2.

36. $a = \frac{120}{49}$ cm.

37. Zadatak ima dva rješenja, jedno kad je $\overline{AB}$ dulja, i drugo kad je kraća stranica pravokutnika. U prvom su slučaju stranice pravokutnika jednake 4 cm i 12 cm, a u drugom $\frac{36}{11}$ cm i $\frac{108}{11}$ cm.

38. $a = 15$ cm, $b = 6$ cm.

39. $a = 7.2$ cm.

40. $r = 8$ cm.

41. $a = 11$ cm, $b = 4$ cm.

42. $l = 17.5\pi$ cm.

43. $71°30'$.

44. $P = (24\pi - 18\sqrt{3})$ cm^2.

45. $a = 2(1 + \sqrt{3})$ cm.

46. $r = \frac{5(2 - \sqrt{2})}{2}$.

47. $r = 3$ cm, $R = 9$ cm.

48. $P = 48$ cm^2.

49. $d = 36.7$ cm.

13. lekcija

1. 5.5 cm, 11.6 cm, 12.9 cm.
2. 9.45 cm, 8.9 cm, 13 cm.
3. 9 cm.
4. $c = 22.18$ cm.
5. $57°41'18''$, $32°18'42''$.
6. $R = 8.27$ cm.
7. $P = 52$ cm^2.
8. $P = 49.7$ cm^2.
9. $o = 28$ cm.
10. $P = 233.5$ cm^2.
11. $r = 2.44$ cm.
12. $t = 9.3$ cm.
13. $d = 5.37$ cm.
14. $d = 6.24$ cm.
15. $\gamma = 61°15'$, $c = 7$ cm.
16. 321.5 cm^2.
17. 6.11 cm.

14. lekcija

1. 27.16 cm.
2. 65.7 cm.
3. $35°26'$.
4. $110°29'14''$.
5. $b = 20.88$ cm ili $b = 7.2$ cm.
6. $v = 13.47$ cm.
7. $b = 32.4$ cm.
8. 11 cm ili 18 cm.
9. $\sqrt{3} - 1$.
10. $P = 300\sqrt{3}$ cm^2.
11. $P = 136.4$ cm^2.
12. $b = 21.4$ cm.
13. 10.4 cm.
14. 8.1 cm.
15. $e = 8.2$ cm.
16. 17.4 cm.
17. 8.2 cm.

15. lekcija

1. $O = 368$ cm^2.
2. $V = 252$ cm^3.
3. $V = 192$ cm^3.
4. $O = 52$ cm^2, $V = 24$ cm^3.
5. $O = 258$ cm^2, $V = 270$ cm^3.
6. $O = 150\sqrt{3}$ cm^2, $V = 125\sqrt{3}$ cm^3.
7. $V = 324\sqrt{7}$ cm^3.
8. $O = 400\sqrt{3}$ cm^2, $V = \frac{4000}{3}$ cm^3.

9. $O = 320$ cm^2, $V = 288.8$ cm^3.
10. (1) $V = 200\pi$ cm^3,
    (2) $V = 160\pi$ cm^3.
11. $V = \frac{128}{\pi}$ cm^3.
12. 31 mm.
13. 42.4 cm^3.
14. $\alpha = 90°$.
15. 4.64 mm.
16. 2π cm^2.
17. $a = 8.2$ cm.
18. 52%.
19. $O = 27\sqrt{2}\pi \approx 120$ cm^2,
    $V = \frac{9}{2}\sqrt{6}\pi \approx 34.6$ cm^3.
20. $O = 389.76\pi$ cm^2,
    $V = 1505.28\pi$ cm^3.

16. lekcija

1. $A(4,2)$, $B(-2,2)$, $C(0,-4)$.
3. $C_1(-3,0)$ ili $C_2(4,0)$.
4. $A(-1,5)$ ili $A(7,5)$.
5. $P = 36$ kv. jed.
7. $N_1(0,3)$ ili $N_2(0,-5)$.
8. $d = 5$ jed.
9. $|A_1B_1| = \frac{5}{2}$, $|B_1C_1| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ i $|A_1C_1| = \sqrt{5}$.
10. $C(0,10)$.
11. $S(3,1)$; $r = |AS| = 5\sqrt{2}$.
12. $P(\triangle ABC) = 16$ kv. jed.
13. $x = 6$.
14. $P = 52$ kv. jed.
15. $C_1(-2,-2)$ ili $C_2(8,8)$.
16. $A(-1,2)$, $B(7,4)$, $C(3,6)$.
17. $|P_2P_4| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
18. $\left(\frac{7}{3}, -1\right)$.
19. $B(-3,0)$, $T(0,2)$.

17. lekcija

1. $x = 11$, $y = 3$.
2. $P = \frac{15}{2}$ kv. jed.
3. $a = -2$.
4. $y = 3x + 6$.
5. $T\left(\frac{11}{4}, 0\right)$.
6. $AB \ldots x+3y-10 = 0$, $BC \ldots 2x+y = 0$, $AC \ldots x - 2y = 0$.
7. Simetrala dužine je pravac $y = 2x - 4$. Površina trokuta što ga simetrala zatvara s koordinatnim osima jednaka je 4.
8. $x - 2y + 9 = 0$.
9. Dva su rješenja zadatka, $k = 2$ i $k = -\frac{6}{7}$.
10. $A(0,3)$, $B(4,5)$, $D(2,8)$.
11. 2.4.
12. $P = 4$ kv. jed.
13. Pravac $2x-3y+6 = 0$ te svaki pravac koji je okomit na dva zadana pravca, kao i svaki pravac s koeficijentom smjera $k = -\frac{3}{2}$.
14. $(2,4)$.
15. $3x - 2y + 13 = 0$.
16. $P = 10$ kv. jed.
17. Pravci su paralelni.
18. Imamo dva rješenja zadatka: $5x+y-9 = 0$, i $x - 5y - 7 = 0$.

18. lekcija

1. Dvije su kružnice rješenje ovog zadatka: $(x-1)^2 + y^2 = 4$ i $(x-5)^2 + y^2 = 4$.
2. $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ ili $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
3. $(x+2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

4. $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ ili $(x-4)^2+(y-5)^2=25$.
5. $(x+1)^2+(y-2)^2=10$.
6. $(x+2)^2+(y-1)^2=36$.
7. $\varphi = 53°8'$.
8. $(x-4)^2+(y-1)^2=8$.
9. 2π kv. jed.
10. $(x-1)^2+(y-5)^2=25$.
11. $(x+10)^2+(y-20)^2=400$ ili $(x-6)^2+(y-4)^2=16$.
12. $x^2+(y-2)^2=4$.
13. $(x-3)^2+(y-5)^2=2$.
14. $T(0,2)$
15. $x-y+3=0$, $31x+17y+45=0$.
16. $C_1(-1,4)$, $C_2(5,4)$.
17. $90°$.
18. $P=\dfrac{r^2\pi\alpha}{180°}\approx 4.43$ kv. jed.
19. $D_1(3,-4)$, $D_2(2,-1)$, $A(4,-2)$, $P(\triangle AD_1D_2)=2.5$ kv. jed.
20. $x+2y+5=0$.

19. lekcija

1. Elipsa $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.
2. $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{25}=1$.
3. $x^2+4y^2=16$.
4. $P=8$ kv. jed.
5. $\varphi = 86°18'17''$.
6. $\cos\varphi=\dfrac{12}{16}$, $\varphi = 41°24'34''$.
7. $x^2+y^2=5$.
8. $P=6\sqrt{3}$ kv. jed.
9. $m=6$ ili $m=-6$.
10. $3x^2-y^2=12$.
11. $y=2x-5$ i $y=-2x+3$.
13. $3x^2+4y^2=192$.
14. $P=16$ kv. jed.
15. $P=12\sqrt{2}$ kv. jed.
16. $y^2=4x$.
17. $(x-3)^2+y^2=36$.
18. $x^2+(y+1)^2=4$.
19. $12\sqrt{3}$ kv. jed.

20. lekcija

1. **1)** $43°50'20''$; **2)** $39°48'20''$.
2. **1)** $27°30'$; **2)** $51°20'24''$.
3. **1)** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a^2$; **2)** $35°15'51''$.
4. $77°21'52''$.
5. $97°10'50''$.
7. $54°44'8''$.
8. $\cos\varphi=\operatorname{tg}15°$, $\varphi = 74°27'27''$.
9. $d=5\sqrt{2}$ cm.
10. 8.4 i 12.6 cm.
11. 3 cm i 9 cm.
12. 25 cm^2, 100 cm^2, 225 cm^2.
13. 6 cm.

21. lekcija

1. **1)** $\overrightarrow{SF}$; **2)** $\vec{0}$; **3)** $\overrightarrow{AS}$; **4)** $\overrightarrow{CF}$.
2. $\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DE}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{EF}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BE}=-4\vec{a}+2\vec{b}$.
3. $\overrightarrow{AB}=\dfrac{7}{5}\overrightarrow{AC}-\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AD}$.
4. $C(5,3)$, $D(-2,5)$.
5. **1)** $|AC|=4\sqrt{2}$, $|BD|=6$; **2)** $\varphi = 45°$.
6. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\vec{m}+\dfrac{1}{2}\vec{n}$, $\overrightarrow{BE}=-\vec{m}+\dfrac{1}{2}\vec{n}$, $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\vec{m}-\vec{n}$.
7. $m=2$.
8. $\vec{v}=\pm(4\vec{i}-2\vec{j})$.
9. $\varphi = 86°38'$.
10. $|AB|=|BC|=|CD|=|DA|$ i $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.
11. $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}$.
12. $|\vec{a}+\vec{b}|=20$.
13. $\vec{v}=6\vec{i}-3\vec{j}$.
14. $81°52'$.
15. $\vec{b}=-4\vec{i}+6\vec{j}$.
16. $\vec{e}=\pm\left(\dfrac{3}{5}\vec{i}+\dfrac{4}{5}\vec{j}\right)$.
17. $P=2$.
18. $P=6\sqrt{3}$.
19. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

22. lekcija

1. $S_{100}=9900$.
2. $a_{100}=0$.
3. Dva su rješenja: (1) $a_5=-11$, $a_{10}=44$ te je $a_n=11n-66$ ili (2) $a_5=44$, $a_{10}=-11$ i $a_n=-11n+99$.
4. $n=8$ ili $n=9$ ili $n=10$.
5. $S_{37}=-2\,109$.
6. $a_1=\dfrac{8}{3}$, $d=\dfrac{2}{9}$.
7. **1)** $x=2$ ili $x=10$; **2)** $x=-1$.
8. $x=-5$.
9. $S_{10}=60$.
10. 21.
11. $a_5=20$.
12. Zadatak ima 4 rješenja:
    (1) $-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}$;
    (2) $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}$;
    (3) $-\dfrac{1}{24}, -\dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{3}$;
    (4) $\dfrac{1}{24}, -\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{3}$.
13. $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8$.
14. $-5, 10, -20, 40, -80, 160$.
15. Prvih pet brojeva koji su racionalni članovi danog niza su a_5, a_{11}, a_{17}, a_{23} i a_{29}. Njihov je zbroj jednak 726.
16. $128\sqrt{2}$.
17. $a_{11}=\sqrt{2}$.
18. $a_n=-3\cdot 2^{n-1}$.

23. lekcija

1. $f'(x)=6x^2+\dfrac{1}{2}x+3$, $f'(-1)=\dfrac{17}{2}$.
2. Iz $f'(x)=3x^2+6x=9$ slijedi $x^2+2x-3=0$ a odavde $x_1=-3$, $x_2=1$.
3. **1)** $2x\ln x+\dfrac{x^2+1}{x}$;
   2) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

3) $e^{2x}(2x^2+6x-4)-2e^{-2x}$;

4) $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

5) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x}\sqrt{x-\sqrt{x}}}$;

6) $3\sin 4x(\sin 2x-\cos 2x)$.

4. **1)** $\dfrac{8}{(3-2x)^2}$; **2)** $\dfrac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$;

3) $\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$; **4)** $\dfrac{1-x}{\sqrt{(1-2x)^3}}$.

5. Nultočka funkcije je $x_0=-2$. Derivacija je $f'(x)=(2x+2)(x+2)+(x^2+2x+2)$, pa je $f'(-2)=2$.

6. $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ pa je $f'(3)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

7. Iz $f'(x)=\dfrac{9}{(2-x)^4}=1$ dobivamo $x_1=2-\sqrt{3}$, $x_2=2+\sqrt{3}$.

8. Iz $f'(x)=2g(x)g'(x)$ slijedi $g'(2)=2$.

9. Iz $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$ slijedi $\sqrt{g(1)}=\dfrac{1}{8}$ pa je $f(1)=\dfrac{1}{8}$.

10. $f(x)=\begin{cases}-2, & x\leqslant -4\\ -2x-6, & -4<x<-2\\ x+4, & -2\leqslant x<0\\ 2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2x+4, & 1<x\leqslant 3\\ 2, & 3<x\end{cases}$

11. Na slici 2).

12. **1)** Iz $2\sqrt{x-2}+1=5$ slijedi $x=f^{-1}(5)=6$.

2) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, $f'(6)=\dfrac{1}{2}$.

3) $(f^{-1})'(5)=\dfrac{1}{f'(6)}=2$.

13. Vrijedi $f^{-1}(7)=3$ pa iz $(f^{-1})'(7)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(7))}=\dfrac{1}{f'(3)}$ slijedi $(f^{-1})'(7)=\dfrac{1}{7}$.

14. $f'(x)=2x\ln x+x+2\cos 2x$,
$f''(x)=3+2\ln x-4\sin 2x$.

15. $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{3}{4\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^3}$, $f''(1)=\dfrac{11}{4}$.

16. **1)** $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$; **2)** $\dfrac{3}{2}$; **3)** 8; **4)** $-\dfrac{\pi}{2}$.

17. **1)** $y=3x-4$; **2)** $y=\dfrac{1}{2}x+2$;

3) $y=-4$; **4)** $y=-\dfrac{1}{4}x+3$.

18. **1)** $y=2x-2$; **2)** $y=3x+3$;

3) $y=x+2$; **4)** $y=-2x+\dfrac{\pi}{2}$.

19. **1)** $y=-x+\dfrac{1}{3}$, $y=x-\dfrac{1}{2}$;

2) $y=8x+16$, $y=-4x$, $y=8x-16$.

20. **1)** $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{11}{2}$; **2)** $y=2x-3$;

3) $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$; **4)** $y=-\dfrac{2}{7}x+\dfrac{92}{7}$.

21. **1)** Iz $3x^2-1=2$ slijedi $x=-1$ ili $x=1$. Tražene točke su $(-1,0)$ i $(1,0)$;

2) $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{4}\right)$; **3)** $(2,1)$; **4)** $(0,3)$;

5) $(1,0)$ i $(-1,-4)$.

22. $\dfrac{\pi}{4}$.

23. $y=-5x+7$

24. $y=6x-13$.

25. **1)** $(2,10)$, $(-2,-6)$;
2) $(1,3)$, $(-1,1)$.

26. $y+8x+4=0$, $8y-x-33=0$.

27. -23.

24. lekcija

1. **1)** $[-1,2]$; **2)** $[0,2]$; **3)** $[-2,-1]$; **4)** $[-2,2]$.

2. Funkcija na slici 1).

3. **1)** $m_{\text{lok}}=m_{\text{glob}}=2$, $M_{\text{lok}}=M_{\text{glob}}=4$;

2) $m_{\text{lok}}=m_{\text{glob}}=1$, $M_{\text{lok}}=M_{\text{glob}}=4$;

3) $m_{\text{lok}}=m_{\text{glob}}=1$, $M_{\text{glob}}=4$;

4) $m_{\text{glob}}=1$, $M_{\text{glob}}=4$.

4. Intervali rasta su

1) $\langle 1,\infty\rangle$; **2)** $\langle -\infty,1\rangle$, $\langle 2,\infty\rangle$;

3) $\langle -\infty,-1\rangle$, $\langle 1,\infty\rangle$;

4) $\langle 0,2\rangle$, $\langle 4,\infty\rangle$;

5) $\langle -\infty,-1\rangle$, $\langle -1,0\rangle$, $\langle 0,\infty\rangle$;

6) $\langle 0,\infty\rangle$.

5. Lokalni ekstremi su **1)** $m=-3$; **2)** $m=0$, $M=1$; **3)** $m=-1$, $M=1$; **4)** $m_1=0$, $m_2=0$, $M=2$; **5)** ne postoje; **6)** ne postoje.

Točke pregiba posjeduju sljedeće funkcije: **3)** jednu; **4)** dvije; **5)** jednu.

6. U točki $x=1$, minimum.

7. U točki $x=4$.

8. Funkcija raste na $[0,1]$, pada na $[1,3]$, U točki $x=3$ ima lokalni minimum. Raste na $[3,5]$, a pada na $[5,7]$. U točki $x=5$ ima lokalni maksimum.

9. **1)** $\left\langle\dfrac{1}{2},\infty\right\rangle$; **2)** $\langle -\infty,-1\rangle$, $\langle 2,\infty\rangle$;

3) $\langle -1,1\rangle$; **4)** $\langle -\infty,2\rangle$, $\langle 2,\infty\rangle$.

10. **1)** $\langle 3,+\infty\rangle$; **2)** $\langle -\infty,-1\rangle$, $\langle 1,\infty\rangle$;
3) $\langle 0,\infty\rangle$; **4)** $\langle -\infty,-1\rangle$, $\langle 1,\infty\rangle$.

11. **1)** $\left\langle\dfrac{1}{3},+\infty\right\rangle$;

2) $\left\langle-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi\right\rangle$, $k\in\mathbf{Z}$;

3) $\left\langle-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right\rangle$, $k\in\mathbf{Z}$;

4) $\langle -1,1\rangle$.

12. **1)** $M=31$, $x_M=-2$;

2) $M=\dfrac{27}{4}$, $x_M=3$;

3) $M=4$, $x_M=0$.

13. **1)** $m=-16$, $x_m=\pm 2$;

2) $m=\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $x_m=-\dfrac{1}{3}\ln 2$;

3) $m=-\dfrac{1}{2}$, $x_m=-1$.

14. **1)** $m=-\dfrac{1}{4}$, $x_m=\dfrac{1}{4}$;

2) $m=-\dfrac{1}{e}$, $x_m=\dfrac{1}{e}$;

3) $M=\dfrac{1}{2e}$, $x_M=\dfrac{1}{2}$.

15. **1)** $m=f(2)=f(-1)=-4$, $M=f(0)=f(3)=0$;

2) $m=f(1)=4$, $M=f(3)=8$;

3) $m=f(\sqrt{2})=-4$, $M=f(3)=45$.

16. **1)** $M(0,2)$, $m(-2,-2)$. Nultočke -1, $-1\pm\sqrt{3}$.

2) $M\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{256}{27}\right)$, $m(1,0)$. Nultočke -3, 1 (dvostruka).

3) $m\left(-\sqrt{\dfrac{5}{2}},-\dfrac{9}{4}\right)$, $m\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}},-\dfrac{9}{4}\right)$, $M(0,4)$. Nultočke -2, -1, 1, 2.

17. $a=-3$, $b=0$.

18. **1)** Vrijedi $f'(3)=2$, te je tangenta $y=2x-5$.

2) Za $x=2$.

3) Za $x=4$.

4) Pregibi postoje tamo gdje je $f''(x)=0$, i f'' mijenja znak. To se događa za $x=1$ i $x=3$.

5) Na intervalu $\langle 1,3\rangle$.

19. $M=f(4)=21$.

20. Točka pregiba je $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{16}{27}\right)$.

21. Na intervalima $[0,3]$ i $[5,7]$.

22. **1)** Na intervalu $[2,4]$.

2) Na intervalu $[0,2]$.

3) Na intervalu $[5,8]$.

23. **1)** $v(t)=2t-4$ cm/s, $a(t)=2$ cm/s^2.

2) Čestica kreće iz $s=6$ brzinom 4 cm/s prema ishodištu.

3) U trenutku $t=2$, udaljenost je 2 cm.

4) Čestica je stala i mijenja smjer gibanja.

5) Za vrijeme $0\leqslant t\leqslant 2$.

24. **1)** $v(t)=30-9.8t$ m/s, $a(t)=-9.8$ m/s^2

2) Iz položaja $s=2$ m, brzinom 30 m/s prema gore.

3) $v(2)=10.4$ m/s, kamen se još kreće uvis, nalazi se na visini $s(2)=42.4$ m. $v(3)=-9.2$ m/s, kamen pada prema zemlji, nalazi se na visini $s(3)=47.9$ m.

4) $s_{\max} = 47.92$ m.

5) Za 6.19 s, iz uvjeta $s(t) = 0$.

25. Ako je x stranica kvadrata, obujam kutije iznosi $V = (40-2x)(25-2x)x$. Derivacija ove funkcije je $V' = 4(3x-50)(x-5)$. Obujam je najveći za $x = 5$.

26. Ako je y duljina kraće stranice, a x duljina dulje stranice pravokutnika, iz sličnosti dobivamo $y = 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}x$. Maksimum se postiže za $x = 6$.

27. Postavimo trokut u koordinatni sustav tako da mu vrhovi budu $(0,6)$, $(0,0)$, $(6\sqrt{3},0)$. Ako su x i y duljine stranica pravokutnika, onda je $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 6$. Maksimalna površina dobiva se za $x = 3\sqrt{3}$.

28. $r = 2\sqrt{6}$.

29. $8\sqrt{2}$ cm.

30. 8 cm.

31. **1)** $2.51 + 9.49$; **2)** $11.5 + 0.5$.

32. To su brojevi 10 i 20.

33. $x_1 = 3 - \sqrt{3}$, $x_2 = 3 + \sqrt{3}$.

34. U točki $x = 2$ nagib je -3.

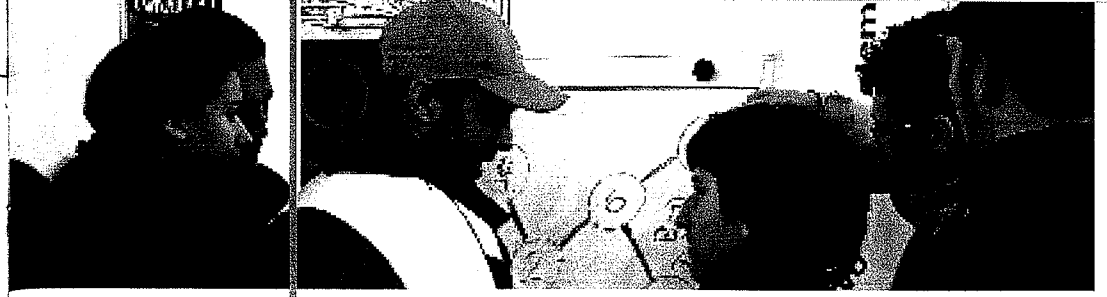
35. Dimenzije papira trebaju biti $10\sqrt{3}$ dm $\times \frac{20}{3}\sqrt{3}$ dm.

36. **1)** $r = h = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm.

2) $h = 2r = 4\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm.

37. **1)** 5 i 5; **2)** 5 i 5; **3)** 4 i 6.

38. **1)** $2\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$; **2)** $4\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt[3]{4}$.



Rješenja ispita

1. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	B	A	B	A	D	A	C	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	D	C	C	B	A	A	B	D

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	A	A	A	D	C	A	B	B

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	D	B	B	B	A	D	A

2. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	B	A	C	A	D	D	A	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	B	B	D	A	B	D	D	C

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	B	A	B	A	A	B	A	D

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	B	D	A	D	A	C	A	D

3. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	D	C	B	B	A	C	A	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	D	D	B	A	A	C	C	A

4. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7
D	B	C	A	A	A	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7
C	A	D	B	D	B	C

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	D	A	A	B	A	B	A

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	D	C	D	B	C	C	D	D

5. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	B	A	A	A	B	A	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	D	C	A	A	D	B	A	D

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	A	A	C	B	B	D	C	D

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	A	D	D	B	C	C	A

6. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	B	A	C	A	C	A	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	D	B	B	A	D	D	C	C

7. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	A	B	B	C	D	B	B	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	D	B	B	C	D	A	B

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	C	B	B	B	A	A	A

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	B	D	B	D	D	B	C	C

8. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	C	D	C	B	B	C	B	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	A	C	D	C	B	C	C

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	A	C	C	B	C	A	A	D

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	A	B	D	C	C	C	B	C

5. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	D	A	D	C	A	B	C	B

9. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	A	C	C	A	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	B	C	D	A	C	B

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	C	C	D	B	A	D

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	B	B	C	D	B	C

10. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	B	D	C	D	C	C	A	B

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	B	B	D	D	D	D	A	A

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	A	A	C	A	C	B	B

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	A	B	D	D	A	D	D

11. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	B	D	A	A	C	B	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	A	B	C	D	B	A	C	A

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	A	B	D	A	B	D	D	D

12. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A	B	D	D	D	A	B	B	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	B	D	B	B	B	C	B	C

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	A	B	A	D	C	B	D

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	D	D	C	A	C	D	A	C

13. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	D	A	D	A	B	A	D	C

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	D	A	C	B	D	A	B	B

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	C	B	B	C	D	C	C	D

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	A	C	D	B	A	C	C	B

14. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	D	B	B	C	B	D	D	B

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	D	A	A	D	B	A	B

15. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	D	A	C	C	B	D	B

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	C	A	D	A	C	D	D	D

16. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	D	B	B	C	B	B	C	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	A	A	A	B	B	B	C	A

17. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	C	D	D	B	C	D	B	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	B	B	C	C	D	C	C

18. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	A	A	A	A	A	B

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	C	D	A	B	A	D	A	D

19. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	C	C	C	A	D	B

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	B	B	C	C	C	D	A

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	D	D	C	C	A	C	B

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	D	B	D	D	D	A	B	D

20. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	D	D	C	C	A	B	D	C

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	D	D	C	B	A	B	B

21. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	D	A	B	B	B	D	A	C

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	B	B	D	A	B	C	D	A

22. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	A	D	A	B	C	C	A	B	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	D	B	C	D	B	A	D	D

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	C	A	D	C	C	B	D	A

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	C	A	C	A	C	B	A	A

23. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	A	C	A	D	A	C	B	D

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	C	A	C	B	B	D	B	A

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	D	C	B	C	C	D	C	B

24. lekcija

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	A	A	C	A	C	B	B	B

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	D	D	B	B	A	C	A	A

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	D	C	B	B	A	D	C	B

Završni ispiti

1. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	A	D	C	D	A	A
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
C	C	B	A	C	B	D	D	B	A

2. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	A	D	C	C	B	B	C	A
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
C	D	D	B	A	B	A	A	C	A

3. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	A	C	D	A	B	A	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
D	D	B	C	A	B	C	D	C	D

4. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	B	A	D	D	D	A	A	B
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
B	C	D	D	A	C	D	D	C	A

5. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	D	B	A	D	B	C	C	A
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
D	D	B	A	C	C	A	B	B	C

6. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	B	A	C	A	D	D	B	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
B	B	B	A	D	C	C	D	A	B

7. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	A	B	C	D	A	A
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
A	C	A	B	D	A	A	B	B	C

8. ispit

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	B	A	D	D	C	A	C	B
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
C	B	B	D	D	D	C	A	C	A

POŠTANSKA I
TELEKOMUNIKACIJSKA ŠKOLA
KNJIŽNICA
ZAGREB, Kenedyev trg 9

Površina kružnog isječka:

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$$

Duljina kružnoga luka:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$$

B – površina osnovke (baze)
P – površina pobočja
h – duljina visine
r – polumjer osnovke stošca

Obujam (volumen) prizme i valjka:

$$V = B \cdot h$$

Oplošje prizme i valjka:

$$O = 2B + P$$

Obujam (volumen) piramide i stošca:

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

Oplošje piramide:

$$O = B + P$$

Oplošje stošca:

$$O = r^2\pi + r\pi s$$

Obujam (volumen) kugle:

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$, r – polumjer kugle

Oplošje kugle:

$$O = 4r^2\pi$$

U pravokutnome trokutu:

$$\text{sinus kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\text{kosinus kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\text{tangens kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

Poučak o sinusima:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Poučak o kosinusima:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Udaljenost točaka T_1, T_2:

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Polovište dužine $\overline{T_1T_2}$:

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$
$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

Skalarni umnožak vektora:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Jednadžba pravca:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Kut α između dvaju pravaca:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$$

Udaljenost točke $T(x_1, y_1)$ i pravca $p \ldots Ax + By + C = 0$:

$$d(T, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Kružnica:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

- središte $S(p, q)$
- tangenta u točki krivulje (x_1, y_1):

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$$

- uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i kružnice:

$$r^2(1 + k^2) = (kp - q + l)^2$$

Elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- fokusi $F_{1,2}(\pm e, 0)$, $e^2 = a^2 - b^2$
- tangenta u točki krivulje (x_1, y_1):

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Hiperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- fokusi $F_{1,2}(\pm e, 0)$, $e^2 = a^2 + b^2$
- asimptote $y = \pm\frac{b}{a}x$
- tangenta u točki krivulje (x_1, y_1):

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Parabola:

$$y^2 = 2px$$

- fokus $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- tangenta u točki krivulje (x_1, y_1):

$$y_1y = p(x + x_1)$$

Aritmetički niz:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Geometrijski niz:

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Geometrijski red:

$$S = \frac{a_1}{q - 1}, \quad |q| < 1$$

Derivacija umnoška:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Derivacija kompozicije:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tangenta na graf funkcije f u $T(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Derivacije:

$$c' = 0$$
$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 0$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

5249

Formule u ovim tablicama identične su onima koje učenik dobiva uz primjerak testa na državnoj maturi.

MATEMATIKA

formule – viša razina

Kompleksan broj:

$i^2 = -1,\ z = a + bi,\ \bar{z} = a - bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ a, b \in \mathbf{R}$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0)$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$

Kvadratna jednadžba:

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \implies$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Viète-ove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Tjeme parabole: $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$b^x = a \iff x = \log_b a$

$\log_b b^x = x = b^{\log_b x}$

$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

$\log_b x^y = y \log_b x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Površina trokuta:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$
$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2}$$
$$P = \frac{abc}{4r_o}$$
$$P = r_u s$$

Jednakostraničan trokut:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$r_o = \frac{2}{3}v \qquad r_u = \frac{1}{3}v$$

Površina paralelograma:

$$P = a \cdot v$$

Površina trapeza:

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

Površina kruga:

$$P = r^2\pi$$

Opseg kruga:

$$O = 2r\pi$$